

SÉRIE A, N° 4412
N° D'ORDRE :
5260

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Guy BOILLAT

1^{re} THÈSE — LA PROPAGATION DES ONDES.

2^e THÈSE — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 27 novembre 1964 devant la Commission d'examen.

MM. DESTOUCHES *Président.*

 LICHNEROWICZ.. }
M^{me} CHOQUET } *Examineurs.*

1965
GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR
PARIS

SÉRIE A, N° 4412

N° D'ORDRE :

5260

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Guy BOILLAT

1^{re} THÈSE — LA PROPAGATION DES ONDES.

2^e THÈSE — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 27 novembre 1964 devant la Commission d'examen.

MM. DESTOUCHES *Président.*

 LICHNEROWICZ.. }
M^{me} CHOQUET } *Examineurs.*

1965

GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR
PARIS

UNIVERSITÉ DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen..... M. ZAMANSKY

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	PETIT	T	Biologie maritime.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparée.	QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.	GALLIEN	T	Embryologie.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	EICHORN	T	Botanique.
WYART	T	Minéralogie et Cristallographie.	DE CUGNAC	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).
TEISSIER	T	Zoologie.	Mlle CAUCHOIS ..	T	Chimie Physique.
MANGENOT	T	Biologie végétale (Orsay).	THELLIER	T	Physique du globe.
AUGER	T	Physique quantique et Relativité.	L'HÉRITIER	T	Biologie générale (Orsay).
MONNIER	T	Physiologie générale.	GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay).
PIVETEAU	T	Paléontologie.	PONCIN	T	Mécanique générale.
ROCARD	T	Physique (E.N.S.).	DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres.
CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.).	QUELET	T	Chimie organique.
LAFFITTE	T	Chimie générale.	CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
FAVARD	T	Géométrie supérieure.	CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.
COULOMB	T	Physique du Globe.	CUVILLIER	T	Micropaléontologie.
Mlle COUSIN	T	Biol. animale (S.P.C.N.).	JUNG	T	Géologie.
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.	TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique.
DRACH	T	Zoologie.	WIEMANN	T	Chimie org. et structurale.
KASTLER	T	Physique (E.N.S.).	JACQUINOT	T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay).
EPHROSSI	T	Génétique.	VASSY	T	Physique de l'atmosphère.
RIVIÈRE	T	Géologie (S.P.C.N.) et Sédimentologie (Orsay).	DESTOUCHES ...	T	Théories physiques.
GAUTHERET	T	Biologie végétale (P.C.B.).	AMIEL	T	Chimie générale.
R. LUCAS	T	Recherches physiques.	HOCART	T	Minéralogie et Cristallographie.
A. THOMAS	T	Biologie cellulaire.	J. P. MATHIEU ..	T	Physique (Optique).
ARNULF	T	Optique appliquée.	COUTEAUX	T	Cytologie.
MORAND	T	Physique Enseignement.	MAY	T	Zoologie (Orsay).
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B.).	CHOQUET	T	Théorie des fonctions et topologie.
FORTIER	T	Mécanique expériment. des fluides.			



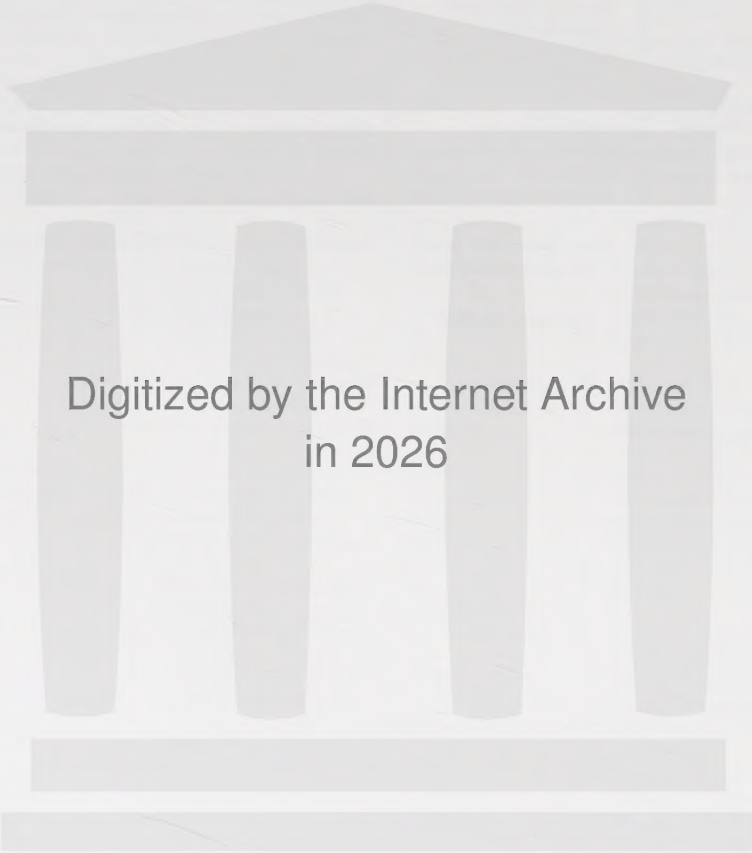
FELDMANN	T	Biologie végétale marine.	PIAUX	T	Chimie (M.P.C.).
GUINIER	T	Physique des solides (Orsay).	BRUN.....	T	Mécanique théorique des fluides.
JOST	T	Physiologie comparée.	LEDERER	T	Chimie biologique (Orsay).
FORTET	T	Calcul des probabilités et physique mathématique.	M ^{me} DUBREIL ..	T	Mathématiques (Agrég.).
SCHWARTZ.....	T	Calcul différentiel et intégral.	M ^{me} LELONG...	T	Mathématiques II (E.N.S.).
CHOUARD	T	Physiologie végétale.	BELLAIR	T	Géologie (S.P.C.N.).
MALAVARD	T	Aviation (Tech. Aéronaut.).	COTTE	T	Physique électricité.
BRELOT	T	Calcul différentiel et intégral.	J. E. DUBOIS ..	T	Chimie organique.
NORMANT	T	Synthèse organique.	LAMOTTE.....	T	Zoologie (E.N.S.).
BENARD	T	Chimie minérale.	A. MICHEL.....	T	Chimie minérale (Orsay).
BUVAT.....	T	Botanique (E.N.S.).	OLMER.....	T	Énergétique générale.
DUGUÉ	T	Statistiques mathématiques.	ROUAULT	T	Électricité (Orsay).
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.	GAUTHIER.....	T	Mécanique appliquée.
ULRICH	T	Physiologie végétale appliquée.	BARCHIEWITZ ..	T	Chimie Physique.
MARÉCHAL	T	Optique théorique et appliquée.	BROSSEL	T	Physique atomique.
KIRRMANN	T	Théories chimiques.	BUSER.....	T	Physiologie comparée.
CHADEFAUD	T	Botanique.	CAMUS.....	T	Physiologie végétale (Orsay).
M ^{lle} LE BRETON.	T	Physiologie de la nutrition.	CASTAING	T	Physique II Thermo. (Orsay).
LELONG.....	T	Application de l'analyse à la géométrie.	CURIEN	T	Minéralogie et Cristallographie.
DEVILLERS	T	Anatomie et histologie comparées.	MOYSE.....	T	Physiologie végétale (Orsay).
EHRESMANN	T	Topologie algébrique.	NOIROT	T	Évolution des êtres organisés.
FRANCON	T	Physique (S.P.C.N.).	PANNETIER.....	T	Chimie générale.
GLANGEAUD	T	Géographie physique et géologie.	POSSOMPES	T	Zoologie.
GODEMENT	T	Mathématiques (M.G.P.).	PULLMANN	T	Chimie quantique.
PISOT.....	T	Techniques mathématiques de la physique.	TEILLAC	T	Physique nucléaire et Radioactivité (Orsay).
ROCH.....	T	Géologie.	TONNELAT	T	Biologie physico-chim. (Orsay).
SCHATZMANN ...	T	Astrophysique.	VILLE	T	Économétrie.
TERMIER.....	T	Géologie générale.	WILLEMART	T	Chimie (P.C.B.).
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.	DODE.....	T	Chimie (Orsay).
LENNUIER.....	T	Physique (M.G.P.).	FREYMAN	T	Recherches physiques.
RIZET	T	Génétique (Orsay).	GUINOCHE.....	T	Biol. végét. (S.P.C.N.) (Orsay).
ROUTHIER.....	T	Géologie appliquée.	ROLLET.....	T	Chimie minérale.
M ^{me} TONNELAT.	T	Physique théorique.	M ^{lle} JOSIEN	T	Chimie (S.P.C.N.).
DIXMIER.....	T	Mathématiques (M.P.C.).	CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
SOUCHAY.....	T	Chimie générale.	ARNOULT	T	Électronique (Orsay).
AIGRAIN	T	Électrotechnique générale.	CHAPELLE.....	T	Physique I (Orsay).
BRUSSET	T	Chimie systématique.	DELANGE	T	Mathématiques I (Orsay).
M. LÉVY.....	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay).	DENY	T	Mathématiques générales (Orsay).
M ^{me} CHAIX	T	Chimie biologique.	GERMAIN.....	T	Mécanique théorique des fluides.
M ^{me} HUREL-PY.	T	Biologie végétale (P.C.B.).	G. LUCAS.....	T	Géologie.
			ALLARD.....	T	Chimie physique.
			BERTHELOT	T	Physique des particules fondamentales (Orsay).

BRICARD	T	Météorologie et physique de l'atmosphère.	LWOFF.....	T	Microbiologie.
M ^{me} ALBE-FESSARD.	T	Psychophysiologie.	SIESTRUNCK	T	Mécanique physique et expérimentale.
FRIEDEL	T	Physique des solides (Orsay).	LACOMBE	T	Métallurgie des métaux nucléaires (Orsay).
M. JULIA	T	Études des molécules complexes.	BROCHARD	T	Physique (P.C.B.) (Orsay).
LENDER	T	Biol. animale (S.P.C.N.) (Orsay).	CABANNES.....	T	Mécanique générale.
MAGAT.....	T	Physicochimie des radioéléments.	LESIEUR	T	Mathématiques I (Orsay).
M ^{lle} QUINTIN...	T	Électrochimie.	MAZET.....	T	Mécanique générale (Orsay).
MONOD	T	Chimie du métabolisme.	CAIRE		Géographie physique et géologique dynamique.
BENOIT	T	Physiol. anim. (Orsay).	COMOLET.....	T	Mécanique des fluides.
DE POSSEL.....	T	Analyse numérique.	CORABŒUF	T	Physiologie animale (Orsay).
CHARLOT.....	T	Chimie analytique.	DELLOUE		Physique de l'exosphère.
LEMÉE.....	T	Écologie végétale (Orsay).	GORENFLOT		Botanique II (Orsay).
GUÉRIN.....	T	Chimie (M.P.C.) (Orsay).	HOUILLOU.....		Biologie animale (P.C.B.).
CHATELET M....	T	Chimie (P.C.B.).	JULLIEN J.....		Chimie (S.P.C.N.) (Orsay).
JEAN	T	Physique nucléaire (Orsay).	MALGRANGE	T	Techn. math. de la phys. (Orsay).
MATTLER.....	T	Physique (S.P.C.N.).	OLIVIER		Anthropologie.
BERGERARD	T	Zoologie (Orsay).	NOZERAN	T	Botanique II (Orsay).
BERTHEIN	T	Électronique (Orsay).	BLANC-		
BOUSSIÈRES ...	T	Radiochimie.	LAPIERRE..	T	Phys. (E.N.S.) (Orsay).
M ^{me} COUTURE..	T	Thermodynamique et mécanique physique.	CHEVAUGEON ...	T	Botanique (Orsay).
ELLENBERGER ..	T	Géologie des grandes régions du globe.	KAHANE	T	Mathématiques (Orsay).
FRANC.....	T	Biologie animale (P.C.B.).	SAMUEL.....	T	Math. E.N.S. féminines.
SCHNELL.....		Botanique tropicale.	KOURGANOFF...	T	Astronomie (Orsay).
STOLKOWSKI....	T	Physiologie végétale.	THIRY	T	Mécanique céleste.
ACHER.....	T	Chimie biologique.	ABELES		Physique (S.P.C.N.).
BAUDOIN.....		Biologie animale (P.C.B.).	AMAT.....	T	Physique (P.C.B.).
BEAUMONT.....		Biologie animale (S.P.C.N.).	AUBOIN.....	T	Géologie.
BLAMONT	T	Géophysique-ionosphère.	M ^{me} BENOIT-		
BOURREAU	T	Botanique.	GUEUTAL.	T	Physique nucléaire et radioactivité (Orsay).
D. CURIE		Physique (M.G.P.).	BOUGIS		Biologie marine (Villefranche-sur-Mer).
DURAND-DELGA.	T	Géologie.	BRUHAT	T	Mathématiques (M.P.C.).
FREON.....	T	Chimie organique (Orsay).	BRUNN	T	Géologie historique (Orsay).
HELLER.....	T	Physiol. végétale.	CHABBAL.....	T	Physique (M.G.P.) (Orsay).
TORTRAT	T	Calcul des probabilités.	DEHEUVELS ...	T	Mathématique propédeutique.
CAILLEUX	T	Géologie (S.P.C.N.).	D'ESPAGNAT ...	T	Physique théorique (Orsay).
MAGNAN	T	Physique (S.P.C.N.).	FURON.....	T	Géologie (S.P.C.N.).
DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire appliquée à la chimie théorique et à la physique nucléaire.	M ^{me} GANS	T	Génétique.
M ^{me} FOURCROY.		Biologie végétale (S.P.C.N.).	GENEVES.....		Biologie végétale (P.C.B.).
M ^{me} CHOQUET			GUILBERT.....		Physique (C.U.S.) (Orléans).
BRUHAT.	T	Mécanique analytique et mécanique céleste.	HUPE.....	T	Pétrographie.
M ^{lle} VEIL.....	T	Physiologie générale.			

HOLLANDE	T	Biologie générale.
LIONS	T	Analyse numérique.
MAITTE	T	Chimie (P.C.B.).
MEYER		Physique propédeutique.
NICOLAS		Géologie appliquée.
PANIGEL		Biologie générale.
RAVIER		Pétrographie.
ROSEAU	T	Mécanique théorique des fluides.
ROUBINE	T	Électronique.
SILBER	T	Chimie (P.C.B.).
UEBERSFELD ...	T	Électronique.
YVON	T	Théories physiques.
HERVÉ	T	Mathématiques.
NERON	T	M a t h é m a t i q u e s (M.P.C.) (Orsay).
Mme PECKER- WIMEL.	T	Astrophysique.
BALKANSKY		Physique (M.P.C.).
LE CORRE	T	Électricité.
DELCROIX	T	Physique théorique (Orsay).
GOURDIN	T	Phys. théor. des hautes énergies (Orsay).

LEHMANN	T	Phys. exp. des hautes énergies (Orsay).
NATAF	T	Physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
ECHALIER		Biologie animale (P.C.B.).
BARRAUD		Physiologie cellulaire.
LIORET		Physiologie végétale (Orsay).
DARS		Géologie structurale et Géologie appliquée.
CAMEFORT	T	Botanique (agrégation).
VICHNIEWSKY ..	T	Mécanique industrielle.
BLAQUIÈRE		Électronique (Orsay).
ARNOUS	T	Physique théorique.
TATIBOUET		Chimie (C.S.U.) (Orléans).
MALLIAVIN	T	Mathématique propédeutique (Orsay).
GAUDEMAR		Chimie propédeutique.
PEREZ Y JORBA ..		Phys. exp. des hautes énergies (Orsay).
DAVID	T	Chimie (Agrég.) (Orsay).
BROUSSE	T	Mécanique théorique.

Secrétaire Général R. POUILLAIN



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552208_0087

A MES PARENTS

LIMINAIRE

Le champ est constitué par l'ensemble d'un certain nombre N de fonctions (réelles) de $n + 1$ variables (n variables d'espace, une variable de temps), solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre (ou ramené à cet ordre). La donnée d'une solution pourra correspondre ou non à la donnée de grandeurs physiques, ce qui importe c'est qu'elle fixe un état.

La notion d'onde est tout aussi générale que celle de champ et comme cette généralité n'est pas sans nuire à la compréhension du terme il importe de la bien définir. Une onde sera une perturbation qui se propage d'un état perturbé dans un état qui ne l'est pas. Cette définition implique l'existence d'une frontière entre ces deux états, une surface d'onde à travers laquelle existent des discontinuités dans les variables de champ elles-mêmes (on parlera alors plus spécialement d'ondes de chocs) ou dans leurs dérivées. L'onde réalise le passage d'un état à un autre ; ce deuxième état est souvent aussi nommé onde, ce qui ajoute encore à la confusion et explique finalement l'acception abusive du vocable pris comme synonyme de champ. Or, si l'on ne peut concevoir une onde sans champ (préexistant), peut-on très bien imaginer un champ sans onde (champ constant, par exemple).

Le problème qui se pose est le suivant : étant donné un certain champ définissant en chaque lieu et à chaque époque l'état non perturbé, une perturbation est créée à un certain instant (instant initial) dans une certaine région ; déterminer l'évolution au cours du temps de cette perturbation. Comme cette évolution dépend évidemment des équations du champ nous sommes amené à faire des hypothèses sur la forme de celles-ci. Nous supposons donc qu'elles constituent un système quasi linéaire hyperbolique d'équations aux dérivées partielles du premier ordre et, écartant la possibilité de chocs a priori, nous supposons que les discontinuités sont du premier ordre à la traversée de la surface d'onde.

Le problème de l'étude des discontinuités se scinde alors, comme le remarque M. Lichnerowicz au sujet des équations d'Einstein (op. cit.), en deux problèmes distincts : le problème des conditions initiales, le problème de l'évolution.

A l'instant initial, la discontinuité dans la dérivée normale (à la surface d'onde) se résout en une somme (vectorielle) de discontinuités ; chacune d'elles se propage ensuite suivant un mode particulier, à une certaine vitesse.

Précisons que l'on est amené à distinguer deux types de vitesses : la vitesse normale de la surface d'onde et la vitesse radiale.

La distribution initiale effectuée, comment les ondes se propagent-elles ? Les discontinuités ne peuvent jamais disparaître. Elles peuvent, en revanche, devenir infinies. Cette singularité a lieu lorsqu'un certain produit $\theta\Phi$ de deux fonctions de l'espace et du temps s'annule. L'annulation de Φ est essentiellement liée au caractère non linéaire du champ et l'on voit, par comparaison avec les études de l'écoulement unidimensionnel des fluides, qu'elle correspond à l'apparition de chocs. Il était alors naturel de dire que la singularité signalée plus haut manifestait la naissance de chocs. Dès lors, $\theta = 0$ qui n'était pas tributaire de la non-linéarité devenait l'expression des chocs linéaires par opposition aux précédents que l'on qualifiait de non linéaires.

Les chocs non linéaires ne peuvent exister quand le système des équations du champ est complètement exceptionnel et il en est de même des chocs linéaires lorsque ce système est à matrices commutables. Cette dernière particularité dépend évidemment du nombre des variables indépendantes. Lorsque $n = 1$ il est clair que tous les systèmes sont à matrices commutables et l'on comprend pourquoi les chocs linéaires, d'ailleurs liés étroitement à la géométrie de la surface d'onde, n'accompagnent jamais les ondes planes des systèmes à deux variables indépendantes.

Ce que l'on vient de dire rend compte des phénomènes qui se produisent sur le front d'onde. Il est donc permis d'affirmer qu'une solution continue des équations du champ ne peut exister au-delà de l'instant critique qui vérifie $\theta\Phi = 0$. S'il fallait donner un exemple concret, nous citerions celui d'une plaque plane, horizontale, qui brusquement se détache et tombe dans l'air sous l'action de son propre poids : le temps critique n'excède pas 28 secondes.

Comme exemple de choc linéaire nous n'examinerons guère ici que les caustiques de l'Optique, encore qu'en relativité générale notamment un phénomène analogue se produise qu'il est toutefois plus difficile d'interpréter.

Les chocs non linéaires seront mis en évidence en théorie de magnétohydrodynamique et les systèmes électrodynamiques complètement exceptionnels déterminés par des équations aux dérivées partielles.

M. Jean-Louis Destouches est à l'origine de cet ouvrage. Pour tant d'intéressantes discussions et pour l'amitié qu'il nous a témoignée nous lui exprimons notre reconnaissance. A M. André Lichnerowicz qui nous a fait l'honneur de s'intéresser à nos recherches et nous a apporté son appui nous disons notre gratitude. Nous remercions Mme Y. Choquet-Bruhat, en particulier pour les renseignements fournis sur certains de ses travaux.

Nous manifestons notre amicale sympathie à M. le Professeur T. Taniuti dont le mémoire cité nous a beaucoup servi.

Nous sommes reconnaissant, à plusieurs égards, à MM. les Professeurs C. Møller, L. Rosenfeld et H. Wergeland.

Guy BOILLAT.

LIVRE PREMIER

THÉORIE GÉNÉRALE

1. **Le champ, les équations du champ et l'onde.** — Le champ sera représenté par un vecteur colonne $\mathbf{u}(x^\alpha)$ à N composantes fonction des $n + 1$ variables indépendantes x^α et assujetti à vérifier le système des N équations aux dérivées partielles :

$$(1.1) \quad A^\alpha(\mathbf{u})\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{f}(\mathbf{u}, x^\beta). \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots, n)$$

Dans le cas général où les matrices A^α dépendent du champ, un tel système est dit *quasi linéaire* ; dans le cas contraire, il est qualifié de *semi-linéaire* ou même de *linéaire* si, de plus, le vecteur $\mathbf{f}$ figurant au second membre possède ce dernier caractère relativement à $\mathbf{u}$. Nous supposons, pour simplifier, que les matrices A^α ne dépendent pas explicitement des coordonnées.

Nous ferons l'hypothèse que la fonction $\mathbf{u}$ est continue tandis que ses dérivées premières continues de part et d'autre du front d'onde tendent sur celui-ci vers deux limites différentes ; c'est dire que $\mathbf{u}$ sera une fonction de classe C^1 par morceaux.

Nous introduirons la surface d'onde par son équation cartésienne

$$(1.2) \quad \varphi(x^\alpha) = 0,$$

ainsi que les nouvelles variables :

$$(1.3) \quad \varphi = \varphi(x^\alpha), \xi^i = \xi^i(x^\alpha); \xi^i, \varphi \in C^2. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Nous ferons usage du symbole dénotant le saut

$$(1.4) \quad [\] = \left(\right)_{\substack{\varphi=+0 \\ \text{état perturbé}}} - \left(\right)_{\substack{\varphi=-0 \\ \text{état non perturbé}}}$$

ce qui nous permettra d'écrire d'après les raisonnements classiques de M. Hadamard [1] :

$$(1.5) \quad [\mathbf{u}] = 0, \quad [\mathbf{u}_{\xi^i}] = 0, \quad [\mathbf{u}_\varphi] = \boldsymbol{\pi}.$$

Dès lors le problème est posé : l'étude de la propagation des ondes sera celle de $\boldsymbol{\pi}$ en tant que fonction des coordonnées. Nous noterons $\mathbf{u}_0$ la valeur du champ dans l'état non perturbé :

$$(1.6) \quad A^\alpha_0(\mathbf{u}_0)\mathbf{u}_{0\alpha} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_0, x^\beta); \mathbf{u}_0 \in C^1.$$

Exprimant les dérivées à l'aide des nouvelles variables

$$(1.7) \quad \mathbf{u}_\alpha = \mathbf{u}_\varphi \varphi_\alpha + \mathbf{u}_{\xi^i} \xi^i_{\alpha},$$

portant dans (1.1) et prenant le saut, l'on obtient :

$$(1.8) \quad A^\alpha_\alpha \varphi_\alpha \boldsymbol{\pi} = 0.$$

Pour que ce système linéaire et homogène en les composantes de $\boldsymbol{\pi}$ admette une solution non nulle, il est nécessaire que le déterminant

$$(1.9) \quad \mathcal{D}(A^\alpha \varphi_\alpha) = 0$$

pour la valeur $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ du champ.

2. Vitesse normale, vitesse radiale. — Parmi les variables x^α l'une, x^0 , que nous désignerons aussi par t , joue le rôle du temps, tandis que les autres, x^i ($i = 1, 2, \dots, n$) sont des variables d'espace. Dans cet espace, le front d'onde sera représenté par une (hyper)surface à $n - 1$ dimensions $S(t)$, mobile au cours du temps, en chaque point de laquelle sera définie, à chaque instant, une vitesse normale de propagation $\lambda \vec{n}$ par les formules

$$(2.1) \quad \lambda = - \frac{\varphi_t}{|\nabla \varphi|}, \quad \vec{n} = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|}$$

dérivant de (1.2). La condition (1.9) pourra encore se traduire par :

$$\mathcal{D}(A^i n^i - \lambda A^0) = 0.$$

La matrice A^0 est régulière ; sinon il existerait des vitesses d'ondes infinies, inacceptables au point de vue physique. Rien n'empêche, alors, de prendre

$$(2.2) \quad A^0 = I,$$

élément unité, pour que :

$$(2.3) \quad \mathcal{D}(A^i n^i - \lambda I) = 0.$$

Nous nous assurerons désormais que (2.2) est bien réalisée, au besoin par la multiplication du système (1.1) par la matrice $(A^0)^{-1}$.

A chaque valeur propre $\lambda^{(i)}(\mathbf{u}, \vec{n})$, racine éventuellement multiple du polynôme caractéristique (2.3) correspondent les vecteurs propres droits $\mathbf{d}_I^{(i)}(\mathbf{u}, \vec{n})$ et gauches $\mathbf{l}_I^{(i)}(\mathbf{u}, \vec{n})$ de la matrice $A_n = A^k n^k$ définis par (*)

$$(2.4) \quad \begin{aligned} (A_n - \lambda^{(i)} I) \mathbf{d}_I^{(i)} &= 0, \\ \mathbf{l}_I^{(i)} (A_n - \lambda^{(i)} I) &= 0, \end{aligned}$$

l'indice I prenant autant de valeurs entières qu'il est de vecteurs propres linéairement indépendants pour la valeur $\lambda^{(i)}$ considérée. Nous dirons

(*) et désignés par les initiales des mots latins *dexter* (droit), *laevus* (gauche).

que le système (1.1) est *hyperbolique* si les valeurs propres de A_n sont réelles et si les vecteurs propres de cette matrice forment une base de l'espace des composantes de $\mathbf{u}$ ou, en d'autres termes, s'il existe N vecteurs propres linéairement indépendants [2]. Les conditions d'hyperbolicité seront supposées satisfaites pour la suite.

Nous introduirons les quantités :

$$(2.5) \quad \psi^{(i)}(\mathbf{u}, \varphi_\alpha) = \varphi_t + |\nabla \varphi| \lambda^{(i)}.$$

Sur le front d'onde, de vitesse $\lambda = \lambda_o^{(i)}$ sera vérifiée, en vertu de (2.1), la relation

$$(2.6) \quad \psi_o^{(i)}(\mathbf{u}_o, \varphi_\alpha) = 0,$$

équation aux dérivées partielles à laquelle est soumise la surface caractéristique (1.2). La théorie classique introduit pour la résolution de telles équations les *lignes* ou *rayons caractéristiques* $C^{(i)}$ (de l'équation (2.6) ; courbes *bicaractéristiques* du système (1.1)) avec le système différentiel

$$(2.7) \quad \frac{dx^\alpha}{d\sigma} = \frac{\partial \psi_o^{(i)}}{\partial \varphi_\alpha}, \quad \frac{d\varphi_\alpha}{d\sigma} = -\frac{\partial \psi_o^{(i)}}{\partial x^\alpha},$$

dans lequel intervient un paramètre σ (plus spécialement noté $\sigma^{(i)}$) qui s'identifie avec le temps le long des courbes $C^{(i)}$ ainsi que le montre l'une des équations écrites.

Avant de poursuivre il n'est peut-être pas inutile de préciser les diverses significations des symboles de dérivation que nous utiliserons. Nous les résumerons dans la formule :

$$\partial_\alpha \psi(x^\beta, \varphi_\gamma) = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_\gamma} \varphi_{\gamma\alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}.$$

Revenons aux expressions (2.7). Compte tenu de la remarque faite concernant le paramètre σ , on voit que les $\frac{\partial \psi_o}{\partial \varphi_j}$ forment les composantes d'une vitesse, la *vitesse radiale* $\vec{\Lambda}$

$$(2.8) \quad \Lambda^{(i),j} = \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial \varphi_j}$$

qui, d'après (2.5), se déduit directement de $\lambda^{(i)}$:

$$(2.9) \quad \vec{\Lambda}^{(i)}(\mathbf{u}, \vec{n}) = \lambda^{(i)} \vec{n} + \frac{\partial \lambda^{(i)}}{\partial \vec{n}} - \left(\vec{n}, \frac{\partial \lambda^{(i)}}{\partial \vec{n}} \right) \vec{n}.$$

On notera que

$$(2.10) \quad \vec{\Lambda}^{(i)} \cdot \vec{n} = \lambda^{(i)}.$$

3. **Premières expressions.** — Il résulte des formules de définition (2.4) l'égalité

$$(A^{kn} - \lambda I) \mathbf{d}_I^{(i)} = (\lambda^{(i)} - \lambda) \mathbf{d}_I^{(i)}$$

qui, multipliée par le module du gradient de φ , $|\nabla \varphi|$, conduit avec (2.1, 5) à

$$(3.1) \quad A^{\alpha} \varphi_{\alpha} \mathbf{d}_I^{(i)} = \psi^{(i)} \mathbf{d}_I^{(i)}$$

et une expression analogue

$$(3.1') \quad \mathbf{l}_I^{(i)} A^{\alpha} \varphi_{\alpha} = \psi^{(i)} \mathbf{l}_I^{(i)}$$

pour les vecteurs gauches. On en déduit la propriété bien connue

$$(3.2) \quad \mathbf{l}_J^{(j)} \cdot \mathbf{d}_I^{(i)} = 0, \quad \forall (j) \neq (i)$$

que nous citons pour mémoire.

Multiplions l'égalité (1.8) par le vecteur propre $\mathbf{l}_{j^0}^{(j)}$ correspondant à la valeur propre $\lambda_{j^0}^{(j)}$. Nous obtenons

$$\mathbf{l}_{j^0}^{(j)} A^{\alpha} \varphi_{\alpha} \boldsymbol{\pi} = \psi_{j^0}^{(j)} \mathbf{l}_{j^0}^{(j)} \cdot \boldsymbol{\pi} = 0$$

et considérant à nouveau cette surface d'onde $S^{(i)}$ — où (i) a une valeur déterminée — qui vérifie (2.6),

$$\mathbf{l}_{j^0}^{(j)} \cdot \boldsymbol{\pi}^{(i)} = 0, \quad \forall (j) \neq (i),$$

soit

$$(3.3) \quad \boldsymbol{\pi}^{(i)} = \pi^i \mathbf{d}_{i^0}^{(i)},$$

les $\pi^i(x^{\alpha})$ étant des fonctions à déterminer. Ainsi $\boldsymbol{\pi}$ appartient au sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs droits associés au mode de propagation envisagé. Afin d'alléger les notations et dès lors qu'aucune ambiguïté n'est à craindre nous laisserons tomber l'indice supérieur (i) .

Dans le voisinage perturbé de S , nous pouvons écrire

$$(3.4) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \varphi \boldsymbol{\pi} + \mathbf{O}(\varphi^2),$$

$\mathbf{O}(\varphi^2)$ dénotant des termes d'ordre au moins égal à deux par rapport à l'infiniment petit principal φ (notations de Landau). Portant dans (1.1) multipliée par $\mathbf{l}_{i'}^{(i)}$, il vient

$$(3.5) \quad \mathbf{l}_{i'} A^{\alpha} \mathbf{u}_{0\alpha} + \mathbf{l}_{i'} A^{\alpha} \varphi_{\alpha} \boldsymbol{\pi} + \varphi \mathbf{l}_{i'} A^{\alpha} \partial_{\alpha} \boldsymbol{\pi} + \mathbf{O}(\varphi^2) = h_{i'} (*)$$

en posant

$$(3.6) \quad h_{i'} = \mathbf{l}_{i'} \cdot \mathbf{f}.$$

(*) On voit pourquoi, en raison de (3.1') et de (2.6), les termes d'ordre deux dans (3.4) n'apportent aucune contribution.

Introduisons l'opérateur gradient dans l'espace des composantes de $\mathbf{u}$, soit

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n} \right)$$

et calculons au second ordre près les différents termes qui figurent dans (3.5) en utilisant (3.4) :

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{l}_I' A^\alpha \mathbf{u}_{0\alpha} &= \mathbf{l}_I' \circ A_0^\alpha \mathbf{u}_{0\alpha} + \varphi \nabla (\mathbf{l}_I' A^\alpha)_0 \pi \mathbf{u}_{0\alpha} + \dots, \\ \mathbf{l}_I' A^\alpha \varphi_\alpha \pi &= \psi^{(i)} \mathbf{l}_I' \cdot \pi = \varphi (\nabla \psi_0^{(i)} \cdot \pi) \mathbf{l}_I' \circ \cdot \pi + \dots, \end{aligned}$$

eu égard à (2.6) et

$$h_I' = h_I' \circ + \varphi \nabla h_I' \cdot \pi + \dots$$

Si l'on se reporte à (3.5) en tenant compte de (1.6), si l'on dérive par rapport à φ , on voit que sera vérifiée sur S :

$$(3.8) \quad \nabla (\mathbf{l}_I' A^\alpha)_0 \pi \mathbf{u}_{0\alpha} + (\nabla \psi_0^{(i)} \cdot \pi) \mathbf{l}_I' \circ \cdot \pi + \mathbf{l}_I' \circ A_0^\alpha \partial_\alpha \pi = \nabla h_I' \cdot \pi.$$

En faisant appel à (3.3) nous aurons

$$(3.9) \quad \mathbf{l}_I' \circ A_0^\alpha \partial_\alpha \pi = \mathbf{l}_I' \circ A_0^\alpha \mathbf{d}_I \circ \partial_\alpha \pi^I + \mathbf{l}_I' \circ A_0^\alpha \frac{\partial \mathbf{d}_I \circ}{\partial \varphi_\beta} \varphi_{\alpha\beta} \pi^I + \mathbf{l}_I' \circ A_0^\alpha \nabla \mathbf{d}_I \circ \mathbf{u}_{0\alpha} \pi^I.$$

Considérons tout d'abord le premier terme du second membre. Dérivons (3.1) par rapport à φ_α :

$$(3.10) \quad A^\alpha \mathbf{d}_I + A^\beta \varphi_\beta \frac{\partial \mathbf{d}_I}{\partial \varphi_\alpha} = \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial \varphi_\alpha} \mathbf{d}_I + \psi^{(i)} \frac{\partial \mathbf{d}_I}{\partial \varphi_\alpha}.$$

D'où

$$(3.11) \quad \mathbf{l}_I' A^\alpha \mathbf{d}_I = \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial \varphi_\alpha} \mathbf{l}_I' \cdot \mathbf{d}_I$$

et

$$(3.12) \quad \mathbf{l}_I' \circ A_0^\alpha \mathbf{d}_I \circ \partial_\alpha \pi^I = \frac{d\pi^I}{d\sigma} \mathbf{l}_I' \circ \cdot \mathbf{d}_I \circ,$$

car, d'après (2.7),

$$(3.13) \quad \frac{d}{d\sigma} = \frac{\partial \psi_0^{(i)}}{\partial \varphi_\alpha} \partial_\alpha$$

dénote la dérivation le long des lignes caractéristiques $C^{(i)}$.

Passons au second terme de (3.9). Dérivons (3.10) par rapport à φ_β :

$$(3.14) \quad A^\alpha \frac{\partial \mathbf{d}_I}{\partial \varphi_\beta} + A^\beta \frac{\partial \mathbf{d}_I}{\partial \varphi_\alpha} + A^\gamma \varphi_\gamma \frac{\partial^2 \mathbf{d}_I}{\partial \varphi_\alpha \partial \varphi_\beta} = \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial \varphi_\alpha \partial \varphi_\beta} \mathbf{d}_I + \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial \varphi_\alpha} \frac{\partial \mathbf{d}_I}{\partial \varphi_\beta} + \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial \varphi_\beta} \frac{\partial \mathbf{d}_I}{\partial \varphi_\alpha}.$$

Par conséquent,

$$(3.15) \quad \mathbf{l}_I' \circ A_0^\alpha \frac{\partial \mathbf{d}_I \circ}{\partial \varphi_\beta} \varphi_{\alpha\beta} \pi^I = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_0^{(i)}}{\partial \varphi_\alpha \partial \varphi_\beta} \varphi_{\alpha\beta} \mathbf{l}_I' \circ \cdot \pi + \pi^I \mathbf{l}_I' \circ \cdot \frac{\partial \mathbf{d}_I \circ}{\partial \varphi_\alpha} \frac{d\varphi_\alpha}{d\sigma}.$$

Quant au dernier terme de (3.9) et au premier terme de (3.8), ils ne sont pas, en général, susceptibles d'expressions plus simples.

Ces différents résultats permettent déjà d'écrire (3.8) selon :

$$(3.16) \quad \frac{d\pi^1}{d\sigma} \mathbf{l}_{1'0} \cdot \mathbf{d}_{10} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_0^{(i)}}{\partial \varphi_\alpha \partial \varphi_\beta} \varphi_{\alpha\beta} + \nabla \psi_0^{(i)} \cdot \boldsymbol{\pi} \right) \mathbf{l}_{1'0} \cdot \boldsymbol{\pi} \\ + \pi^1 \mathbf{l}_{1'0} \frac{\partial \mathbf{d}_{10}}{\partial \varphi_\alpha} \frac{d\varphi_\alpha}{d\sigma} + \pi^1 \left\{ \nabla (\mathbf{l}_1 \cdot \Lambda^\alpha)_0 \mathbf{d}_{10} + \mathbf{l}_{1'0} \Lambda_0^\alpha \nabla \mathbf{d}_{10} \right\} \mathbf{u}_{0\alpha} = \nabla h_{1'0} \cdot \boldsymbol{\pi}.$$

4. **Le système différentiel aux discontinuités.** — Considérons sur une courbe $C^{(i)}$, à l'instant σ , le point $M(x^\alpha)$ qui, à l'instant initial, se trouvait en $M_0(x_0^\alpha)$ et soient $q^i(x^\alpha)$, n quantités constantes le long de cette courbe. Nous avons alors :

$$\frac{dq^i}{d\sigma} = \frac{\partial \psi_0^{(i)}}{\partial \varphi_\alpha} q_\alpha^i = 0.$$

Dérivons par rapport à x^j ;

$$\left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^j \partial \varphi_\alpha} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \varphi_\beta \partial \varphi_\alpha} \varphi_{\beta j} \right) q_\alpha^i + \frac{\partial \psi_0}{\partial \varphi_\alpha} q_{\alpha j}^i = 0,$$

c'est-à-dire,

$$(4.1) \quad \frac{d}{d\sigma} q_j^i = - \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^j \partial \varphi_k} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \varphi_l \partial \varphi_k} \varphi_{lj} \right) q_k^i.$$

Rappelons que, si une matrice $Q(\sigma)$ vérifie la relation

$$\frac{dQ}{d\sigma} = MQ,$$

son déterminant $\mathcal{D}(Q)$ satisfait à

$$\frac{d}{d\sigma} \mathcal{D}(Q) = (\text{Tr. } M) \mathcal{D}(Q),$$

où $\text{Tr. } M$ note la trace de la matrice M . En conséquence, si l'on introduit

$$\theta = \sqrt{\left| \frac{\mathcal{D}(q_j^i)_0}{\mathcal{D}(q_j^i)} \right|},$$

en sorte que $\theta = 1$ lorsque $\sigma = 0$,

$$(4.2) \quad \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \varphi_{ij} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^i \partial \varphi_i} = 2 \frac{d}{d\sigma} \text{Log } \theta.$$

De la constance des q^i ($q^i = (q^i)_0$) et des propriétés des déterminants fonctionnels découle d'ailleurs

$$\frac{\mathcal{D}(q_j^i)_0}{\mathcal{D}(q_j^i)} = \frac{\mathcal{D}(q^i) \mathcal{D}(x^i)}{\mathcal{D}(x^i) \mathcal{D}(q^i)} = \frac{\mathcal{D}(x^i)}{\mathcal{D}(x_0^i)},$$

soit

$$(4.3) \quad \theta = \sqrt{\left| \frac{D(x^i)}{D(x_0^i)} \right|}.$$

Finalement, on peut récrire (3.16) sous la forme :

$$(4.4) \quad \mathbf{l}_{1'0} \left\{ \frac{d\boldsymbol{\pi}}{d\sigma} + \left(\frac{d}{d\sigma} \text{Log } \theta - \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda_0^{(i),k}}{\partial x^k} + |\nabla \varphi| \nabla \lambda_0^{(i)} \cdot \boldsymbol{\pi} \right) \boldsymbol{\pi} \right\} \\ + \nabla (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{A}^\alpha)_0 \boldsymbol{\pi} \mathbf{u}_{0\alpha} - \pi^i \frac{\partial \mathbf{l}_{1'0}}{\partial \varphi_\alpha} \Lambda^\beta \varphi_\beta \frac{\partial \mathbf{d}_{10}}{\partial x^\alpha} = \nabla h_{1'0} \cdot \boldsymbol{\pi}.$$

Les vecteurs propres n'étant définis qu'à un facteur multiplicatif près, il fallait que cette équation fût invariante lors du remplacement du vecteur gauche $\mathbf{l}_{1'0}$ par un vecteur colinéaire ; l'avant-dernier terme du premier membre assure cette invariance.

Les discontinuités se déplacent avec la vitesse radiale le long des rayons caractéristiques (*). Les systèmes (2.7) et (4.4) auxquels sera adjointe l'égalité (3.3) permettront de déterminer leurs valeurs. Les équations (2.7) tout d'abord intégrées fourniront

$$(4.5) \quad x^0 = \sigma, \quad x^i = x^i(x_0^j, \sigma),$$

pourvu que l'on se donne $(\nabla \varphi)_0$ fonction des x_0^i c'est-à-dire la surface d'onde S_0 , lieu de M_0 , à l'instant initial $\sigma = 0$ (**):

$$(4.6) \quad \varphi^0(x_0^i) = 0.$$

Les expressions (4.5) portées dans (4.4), il restera à résoudre ce système différentiel pour obtenir $\boldsymbol{\pi}$. Remarquons tout de suite que ce système n'est pas, en général, linéaire et qu'il peut, d'autre part, devenir singulier, toute singularité de $\mathbf{u}_0$ étant écartée par ailleurs. Nous examinerons longuement ces circonstances dans les prochains paragraphes.

5. La propagation des ondes dans un état constant. — Nous porterons notre intérêt sur les ondes qui se propagent dans une région où le champ est constant. Nous marquerons par un astérisque la valeur que prend le champ dans cette région et qui, d'après (1.6), devra être telle que

$$(5.1) \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}_*, x^\alpha) \equiv 0, \quad \mathbf{u}_* = \text{cte},$$

en supposant, évidemment, qu'une solution existe. Alors, d'importantes

(*) Nous dirions, pour parler un langage de physicien, que les rayons caractéristiques sont les « guides d'ondes ».

(**) En résolvant (4.5) par rapport aux x_0^i que l'on portera dans (4.6) l'on trouvera l'équation (1.2) de $S(t)$.

simplifications se produisent. Tout d'abord, $\psi_*^{(i)}$ ne dépendant plus explicitement des coordonnées, (2.7) montre que les φ_α sont constants le long des courbes $C^{(i)}$. Par suite, les relations (4.5) seront obtenues immédiatement

$$(5.2) \quad x^0 = \sigma, \quad x^j = x_0^j + \Lambda_{*0}^{(i),j}(\mathbf{u}_*, \vec{n}_0)\sigma,$$

le vecteur normal $\vec{n}_0(x_0^i)$ à S_0 étant calculé à partir de (4.6). On en déduit :

$$(5.3) \quad \theta = \sqrt{\mathfrak{D}(\sigma \partial_{i_*} \Lambda_{*0}^{(i),j} + \delta_i^j)},$$

avec

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

D'autre part, le système (4.4) devient

$$(5.4) \quad \left\{ \frac{d\pi^i}{d\sigma} + \left(\frac{d}{d\sigma} \text{Log } \theta + |\nabla \varphi| \nabla \lambda_* \cdot \pi \right) \pi^i \right\} \mathbf{l}_{i*} \cdot \mathbf{d}_{i*} = \nabla h_{i*} \cdot \pi.$$

A partir du déterminant

$$(5.5) \quad \Delta^{(i)} = \mathfrak{D}(\mathbf{l}_i, \mathbf{d}_{i'}),$$

on introduit les quantités $f_{i'}^i$: le produit $\Delta^{(i)} \cdot f_{i'}^i$ égale le déterminant obtenu en remplaçant dans $\Delta^{(i)}$ la i ème colonne par celle d'éléments

$$\nabla h_{i''} \cdot \mathbf{d}_{i'},$$

I'' prenant toutes les valeurs de I . Il est essentiel de noter que $\Delta^{(i)}$ n'est pas nul. En effet, si l'on désigne par L et D les matrices formées par les vecteurs propres gauches et droits de A_n , en vertu de (3.2),

$$(5.6) \quad \mathfrak{D}(LD) = \prod_{(i)} \Delta^{(i)} = \mathfrak{D}(L)\mathfrak{D}(D) \neq 0,$$

puisque le système (1.1) est hyperbolique (cf. § 2). Nous pouvons ainsi reprendre (5.4) résolu selon les accolades

$$(5.7) \quad \frac{d\pi^i}{d\sigma} + \left(\frac{d}{d\sigma} \text{Log } \theta + |\nabla \varphi| \nabla \lambda_*^{(i)} \cdot \pi \right) \pi^i = f_{i'*}^i \pi^{i'}$$

et donner, après intégration, la loi de propagation des discontinuités [3] :

$$(5.8) \quad \pi = \frac{\eta}{\theta \Phi},$$

avec

$$(5.9) \quad \Phi = 1 + |\nabla \varphi| \int_0^\sigma \nabla \lambda_*^{(i)} \cdot \eta(\tau) \frac{d\tau}{\theta(\tau)},$$

$$(5.10) \quad \eta = \eta^i \mathbf{d}_{i*};$$

les η^i étant solutions (continues tant que les $f_{1^*}^i$ le sont) de :

$$(5.11) \quad \frac{d\eta^i}{d\sigma} = f_{1^*}^i \eta^{i'}, \quad \eta_0^i = \pi_0^i(x_0^i).$$

La donnée du champ perturbateur $\mathbf{u}^0(x_0^i)$ détermine les π_0^i . A l'instant initial

$$S_0^{(i)} = S_0^{(j)} = S_0, \quad \mathbf{V}(i), (j)$$

et dans le voisinage perturbé de S_0

$$(5.12) \quad \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_* + \varphi^0 \boldsymbol{\pi}^0 + \dots$$

$\boldsymbol{\pi}^0$ se résout en ses composantes sur la base des vecteurs propres :

$$(5.13) \quad \boldsymbol{\pi}^0(x_0^i) = \sum_{(k)} \sum_{\mathbf{k}} \pi_0^{\mathbf{k}} \mathbf{d}_{\mathbf{k}}^{(k)} = \sum_{(k)} \pi_0^{(k)}.$$

On en tire

$$(5.14) \quad \mathbf{l}_{1^*} \cdot \boldsymbol{\pi}^0 = \pi_0^i \mathbf{l}_{1^*} \cdot \mathbf{d}_{1^*},$$

puis les π_0^i par résolution de ce système.

Nous ferons deux remarques. Le degré du polynôme $\theta^2(\sigma)$ est, au plus, égal à $n - 1$: il existe une relation entre les composantes de la vitesse radiale $\vec{\Lambda}_{*0}^{(i)}(x_0^i)$ puisqu'il en existe une entre les variables x_0^i (l'équation (4.6) de la surface S_0) et le déterminant $\mathcal{D}(\partial_{i_0} \Lambda_{*0}^{(i),j})$ est nul *ipso facto*.

Lorsque la fonction $\mathbf{f}$ au second membre de (1.1) est identiquement nulle, l'intégrale

$$\int_0^\sigma \frac{d\tau}{\theta(\tau)}$$

qui se trouve dans Φ , ne fait intervenir que des fonctions élémentaires dans le cas usuel où $n = 3$. Pour des variables plus nombreuses, on devra faire appel aux fonctions elliptiques ($n = 4, 5$) et hyperelliptiques ($n > 5$).

6. Ondes planes, ondes de translation et ondes parallèles. — Dans ce paragraphe nous traiterons de trois cas particuliers importants. Lorsque la surface S_0 est plane

$$(6.1) \quad \vec{n}_0 = \text{cte}, \quad \vec{\Lambda}_{*0}^{(i)} = \text{cte}, \quad \theta = 1,$$

et les formules (5.2) montrent que S est également une surface plane. Nous énoncerons brièvement : les ondes planes restent planes. Ces différentes propriétés confèrent leur importance à de telles ondes.

Les ondes de translation possèdent également une vitesse radiale constante mais pour une autre raison : elle ne dépend pas du vecteur normal

$$(6.2) \quad \vec{\Lambda}_{*}^{(i)} = \vec{\Lambda}_{*}^{(i)}(\mathbf{u}_*) = \text{cte}, \quad \theta = 1.$$

Il en résulte que S se déduit de S_0 par simple translation, cette dernière ne subissant ainsi aucune déformation au cours du temps.

Les ondes parallèles se caractérisent par une vitesse normale scalaire constante

$$(6.3) \quad \lambda_*^{(i)} = \lambda_*^{(i)}(\mathbf{u}_*) = \text{cte},$$

d'où découlent, d'après (2.9),

$$(6.4) \quad \vec{\Lambda}_*^{(i)} = \lambda_*^{(i)} \vec{n}$$

et (cf. (5.3))

$$(6.5) \quad \theta^2 = \mathcal{D}(\lambda_*^{(i)} \sigma \partial_{i_0} n_0^j + \delta_i^j).$$

Or, en vertu de la relation de Rodriguez

$$d\vec{M}_0 + R_0 d\vec{n}_0 = 0,$$

les rayons principaux R_0 de courbure de la surface S_0 au point M_0 sont solutions de

$$\mathcal{D}(R_0 \partial_{i_0} n_0^j + \delta_i^j) = 0$$

et, par suite, le polynôme θ^2 les admet pour racines. Ainsi, dans l'espace physique ordinaire ($n = 3$)

$$(6.6) \quad \theta^2 = \frac{(\lambda_*^{(i)} \sigma - R_0^1)(\lambda_*^{(i)} \sigma - R_0^2)}{R_0^1 R_0^2},$$

ou encore [4]

$$(6.7) \quad \theta = \sqrt{\lambda_*^2 K_0 \sigma^2 - 2\lambda_* \Omega_0 \sigma + 1},$$

en faisant intervenir les courbures moyenne Ω_0 et totale K_0 .

Plus spécialement si les ondes sont sphériques de rayon r ,

$$\theta = \frac{r}{r_0}$$

et si elles sont circulaires cylindriques

$$\theta = \sqrt{\frac{r}{r_0}}.$$

7. Les chocs. -- Nous disons qu'il se produit un *choc* lorsque π prend une valeur infinie ; le champ peut, alors, être lui-même discontinu. En réalité, il présente une variation très rapide d'intensité en « marche d'escalier », en « bosse » ou « doigt de gant », dans une région physique de faible épaisseur. De toute façon, dans cette région, les équations (1.1)

cessent d'être valables et doivent être remplacées par d'autres. L'on sait déjà comment traiter les systèmes conservatifs

$$(7.1) \quad \partial_\alpha \mathbf{f}^\alpha(\mathbf{u}) = 0$$

en écrivant les conditions de choc

$$(7.2) \quad \tilde{\lambda}[\mathbf{f}^0] = [\mathbf{f}^i]n^i$$

auxquelles doivent obéir les valeurs du champ de part et d'autre de la surface d'onde de choc [5].

Au point de vue mathématique, le problème revient à considérer les solutions discontinues de (1.1), les *solutions faibles*, et une question d'unicité se pose immédiatement ; il peut exister une infinité de telles solutions correspondant aux mêmes données initiales [2] [6]. Des remèdes (faut-il écrire des palliatifs ?) tels que l'introduction d'un terme de viscosité [7] [8] ou la prise en considération des phénomènes microscopiques ont été proposés.

8. Les chocs non linéaires. — Ils sont dus à l'annulation de Φ et sont absents des champs linéaires. Ils n'auront pas lieu si les conditions

$$(8.1) \quad \nabla \lambda^{(i)} \cdot \mathbf{d}_t \equiv 0$$

qui assurent la continuité des dérivées premières de $\lambda^{(i)}$,

$$(8.2) \quad [\partial_\varphi \lambda^{(i)}] = 0,$$

sont vérifiées. Dans ce cas nous dirons avec M. Lax que le système (1.1) est *exceptionnel* par rapport aux ondes considérées [2]. Quand il possède cette propriété pour toutes les valeurs propres, il est *complètement exceptionnel*. Tels sont notamment, de toute évidence, les systèmes semi-linéaires ainsi que le cas suivant [9]

$$(8.3) \quad \mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ 0 & \mathbf{C} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sont des matrices carrées de dimensions respectives k et $N - k$, $\mathbf{B}$ est indépendante des k premières composantes de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{C}$ des autres :

$$(8.4) \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(u^{k+1}, \dots, u^N, \vec{n}), \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}(u^1, u^2, \dots, u^k, \vec{n}).$$

Au contraire, un système du type

$$(8.5) \quad \mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ \mathbf{D} & \mathbf{C} \end{pmatrix},$$

où $\mathbf{C}$ est la matrice que l'on vient de définir, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{D}$ sont quelconques, est seulement exceptionnel par rapport aux ondes déterminées par $\mathbf{C}$.

Des chocs apparaîtront certainement si

$$(8.6) \quad \nabla \lambda^{(i)} \cdot \pi < 0.$$

Que représente cette condition ? Nous avons

$$(8.7) \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} \text{Log} |\lambda^{(i)}| \right] = \frac{1}{\lambda^{(i)}} \left[\frac{\partial \lambda^{(i)}}{\partial \varphi} \right] \varphi_t = - |\nabla \varphi| \nabla \lambda^{(i)} \cdot \pi,$$

et (8.6) se traduit par

$$(8.8) \quad \left[\frac{\partial |\lambda^{(i)}|}{\partial t} \right] > 0.$$

Le premier membre n'est autre que l'accélération relative de la face postérieure perturbée, si l'on peut dire, de la surface d'onde par rapport à la face antérieure ; lorsque celle-là, accélérée, rejoint celle-ci, il se produit des chocs. Ces derniers sont ici la manifestation locale d'un phénomène global de formation d'enveloppe qui a été, en aérodynamique, étudié en détail pour les écoulements unidimensionnels [5].

9. Les chocs linéaires. — Ils sont dus à l'annulation de θ , ne doivent rien au caractère non linéaire du champ et ne sont donc pas étrangers aux champs linéaires. En général, θ s'annule sur une surface Σ , appelée *surface focale*, constituée de $n - 1$ nappes. Ses points sont dénommés *foyers* ou *points focaux* et Σ constitue encore l'enveloppe des lignes caractéristiques $C^{(i)}$.

Relativement à l'origine formelle de ces chocs, nous allons établir la proposition suivante [10] :

Les chocs linéaires sont dus à la non-commutabilité des matrices A^i . Supposons que ces matrices commutent entre elles c'est-à-dire que l'on ait pour la valeur $\mathbf{u} = \mathbf{u}_*$:

$$(9.1) \quad A^i A^j = A^j A^i, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$$

On peut alors écrire, d'après (3.1) (se rappeler (2.2)),

$$\mathbf{l}_j A^\alpha A^\beta \varphi_\beta \mathbf{d}_i = \psi^{(i)} \mathbf{l}_j A^\alpha \mathbf{d}_i = \mathbf{l}_j A^\beta \varphi_\beta A^\alpha \mathbf{d}_i = \psi^{(j)} \mathbf{l}_j A^\alpha \mathbf{d}_i,$$

soit

$$\mathbf{l}_j^{(j)} A^\alpha \mathbf{d}_i^{(i)} = 0, \quad \forall (j) \neq (i).$$

En multipliant (3.10) à gauche par $\mathbf{l}_j$, il vient en raison de l'orthogonalité de ce vecteur avec $\mathbf{d}_i$,

$$\mathbf{l}_j \frac{\partial \mathbf{d}_i}{\partial \varphi_\alpha} = 0,$$

qui se traduit par

$$\frac{\partial \mathbf{d}_i^{(i)}}{\partial \varphi_\alpha} = c_i^{\alpha, 1'} \mathbf{d}_{i'}^{(i)}.$$

Cette dernière expression portée dans (3.10), il reste finalement

$$(9.2) \quad A^\alpha \mathbf{d}_i = \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial \varphi_\alpha} \mathbf{d}_i,$$

qui équivaut (cf. (2.8)) à

$$(9.3) \quad (A^j - \Lambda^{(i),jI}) \mathbf{d}_i^{(i)} = 0.$$

Ainsi les vitesses radiales, tout comme les vecteurs propres, ne dépendent-elles pas de $\vec{n}$. Toutes les ondes associées au système sont des ondes de translation (§ 6) et aucun choc linéaire ne peut se produire.

Réciproquement, soit un système (1.1) pour lequel toutes les vitesses radiales et les vecteurs propres associés ne dépendent que du champ et soient $K^i(\mathbf{u})$ la matrice diagonale formée par les i -ièmes composantes de ces vitesses, $D(\mathbf{u})$ la matrice des vecteurs propres droits. Nous aurons, grâce à (2.10),

$$A^i n^i = DK^i n^i D^{-1},$$

c'est-à-dire

$$(9.4) \quad A^i = DK^i D^{-1};$$

les matrices commutent. Notons que l'on peut néanmoins rencontrer, dans les systèmes à matrices non commutables, des ondes de translation; les vecteurs propres associés dépendront généralement de $\vec{n}$ (cf. les ondes d'Alfvén, liv. II, § 3). En résumé, nous pouvons dire qu'il faut, pour que des chocs linéaires puissent se produire, que les égalités (9.1) ne soient pas vérifiées. On rappellera, ici, que c'est un principe très général en Physique qui affirme qu'« il est nécessaire que certains éléments de symétrie n'existent pas pour qu'un phénomène puisse se produire » [11].

10. Les discontinuités du second ordre. — Il s'agit de déterminer les termes d'ordre deux dans le développement (3.4). Nous supposons, pour simplifier, que la fonction $\mathbf{f}$ dans (1.1) est identiquement nulle et nous considérerons la propagation dans un état constant. Nous écrirons donc dans le voisinage perturbé de S :

$$(10.1) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_* + \varphi \boldsymbol{\pi} + \frac{\varphi^2}{2} \boldsymbol{\chi} + \mathbf{0}(\varphi^3),$$

où, évidemment,

$$(10.2) \quad \boldsymbol{\chi} = [\mathbf{u}_{\varphi\varphi}].$$

De l'égalité

$$(10.3) \quad \mathbf{l}_j^{(j)} A^\alpha \mathbf{u}_\alpha = 0, \quad (j) \neq (i),$$

résulte au premier ordre,

$$\mathbf{l}_j A^\alpha (\varphi \boldsymbol{\pi}_\alpha + \varphi_\alpha \boldsymbol{\pi} + \varphi \varphi_\alpha \boldsymbol{\chi}) + \mathbf{0}(\varphi^2) = 0,$$

soit encore, en utilisant (3.1, 3),

$$\varphi \mathbf{l}_* \mathbf{A}^\alpha (\pi_\alpha^1 \mathbf{d}_* + \pi^1 \mathbf{d}_{* \alpha}) + \varphi \psi_*^{(j)} \mathbf{l}_* \boldsymbol{\chi} + \psi^{(j)} \mathbf{l}_* \cdot \mathbf{d}_* \pi^1 + \mathbf{0}(\varphi^2) = 0.$$

Mais

$$(10.4) \quad \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_* + \nabla \mathbf{d}_* (\mathbf{u} - \mathbf{u}_*) + \dots = \mathbf{d}_* + \varphi \nabla \mathbf{d}_* \boldsymbol{\pi} + \mathbf{0}(\varphi^2),$$

et, faisant usage de (3.10, 14), on obtient :

$$\varphi \psi_*^{(j)} \mathbf{l}_* \left\{ \boldsymbol{\chi} - \pi^1 \nabla \mathbf{d}_* \boldsymbol{\pi} - \pi_\alpha^1 \frac{\partial \mathbf{d}_*}{\partial \varphi_\alpha} - \frac{1}{2} \pi^1 \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{d}_*}{\partial \varphi_\alpha} \right) \right\} + \mathbf{0}(\varphi^2) = 0.$$

Il en découle finalement,

$$(10.5) \quad \boldsymbol{\chi} = \pi^1 \nabla \mathbf{d}_* \boldsymbol{\pi} + \pi_\alpha^1 \frac{\partial \mathbf{d}_*}{\partial \varphi_\alpha} + \frac{1}{2} \pi^1 \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{d}_*}{\partial \varphi_\alpha} \right) + \boldsymbol{\chi}^1 \mathbf{d}_*.$$

Parce que les vecteurs propres dépendent généralement du champ et du vecteur normal $\vec{n}$, les discontinuités du second ordre dépendent de celles du premier ordre. Il reste à déterminer les fonctions $\boldsymbol{\chi}^i$. Pour cela on procède ainsi qu'au paragraphe 3 : on écrit

$$(10.6) \quad \mathbf{l}_*^{(i)} \mathbf{A}^\alpha \mathbf{u}_\alpha = 0,$$

en négligeant seulement les termes d'ordre supérieur à deux. On a :

$$(10.7) \quad \varphi \mathbf{l}_* \mathbf{A}^\alpha \partial_\alpha \boldsymbol{\pi} + \psi^{(i)} \mathbf{l}_* \cdot \boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2} \varphi^2 \mathbf{l}_* \mathbf{A}^\alpha \partial_\alpha \boldsymbol{\chi} + \varphi \psi^{(i)} \mathbf{l}_* \boldsymbol{\chi} + \mathbf{0}(\varphi^3) = 0.$$

Nous donnons, sans commentaire, le calcul de ces différents termes.

$$\begin{aligned} a) \quad \mathbf{l}_* \mathbf{A}^\alpha \partial_\alpha \boldsymbol{\pi} &= \mathbf{l}_* \mathbf{A}^\alpha (\partial_\alpha \pi^1 \mathbf{d}_* + \pi^1 \partial_\alpha \mathbf{d}_*) = \mathbf{l}_* \mathbf{A}^\alpha \pi_\alpha^1 (\mathbf{d}_* - \varphi \nabla \mathbf{d}_* \boldsymbol{\pi}) \\ &+ \pi^1 \left\{ \mathbf{l}_* \mathbf{A}^\alpha \frac{\partial \mathbf{d}_*}{\partial \varphi_\beta} \varphi_{\alpha\beta} - \varphi \mathbf{l}_* \mathbf{A}^\alpha \partial_\alpha (\nabla \mathbf{d}_* \boldsymbol{\pi}) \right\} + \mathbf{0}(\varphi^2) \text{ (cf. (10.4))} \\ \mathbf{l}_* \mathbf{A}^\alpha \partial_\alpha \boldsymbol{\pi} &= \left(\frac{d\pi^1}{d\sigma} + \frac{1}{2} \partial_k \Lambda^k \pi^1 \right) \mathbf{l}_* \cdot \mathbf{d}_* + \varphi \left\{ \left(\frac{d\pi^1}{d\sigma} + \frac{1}{2} \partial_k \Lambda^k \pi^1 \right) \nabla (\mathbf{l}_* \cdot \mathbf{d}_*) \boldsymbol{\pi} \right. \\ &+ (\nabla \Lambda^k \cdot \boldsymbol{\pi}) \mathbf{l}_* \cdot \partial_k \boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2} \pi^1 \partial_k (\nabla \Lambda^k) \boldsymbol{\pi} (\mathbf{l}_* \cdot \mathbf{d}_*) - \frac{1}{2} \pi^1 (\nabla \psi_* \cdot \boldsymbol{\pi}) \mathbf{l}_* \cdot \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{d}_*}{\partial \varphi_\alpha} \right) \\ &\left. - \mathbf{l}_* \mathbf{A}^\alpha \partial_\alpha (\pi^1 \nabla \mathbf{d}_* \boldsymbol{\pi}) \right\} + \mathbf{0}(\varphi^2) \text{ (cf. (3.14))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \psi^{(i)} \mathbf{l}_* \cdot \boldsymbol{\pi} &- \pi^1 \left\{ \varphi \nabla \psi_* \cdot \boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2} \varphi^2 \nabla \psi_* \cdot \boldsymbol{\chi} + \varphi^2 \pi^1 \nabla (\nabla \psi^T) \cdot \boldsymbol{\pi} + \dots \right\} \mathbf{l}_* \cdot \mathbf{d}_* \\ &+ \varphi \nabla (\mathbf{l}_* \cdot \mathbf{d}_*) \boldsymbol{\pi} - \varphi \mathbf{l}_* \nabla \mathbf{d}_* \boldsymbol{\pi} + \dots \} = \varphi (\nabla \psi_* \cdot \boldsymbol{\pi}) \mathbf{l}_* \cdot \boldsymbol{\pi} \\ &+ \varphi^2 \left(\pi^1 (\nabla \psi_* \cdot \boldsymbol{\pi}) \nabla (\mathbf{l}_* \cdot \mathbf{d}_*) \boldsymbol{\pi} - \mathbf{l}_* \nabla \mathbf{d}_* \boldsymbol{\pi} \right) + \left\{ \frac{1}{2} \nabla \psi_* \cdot \boldsymbol{\chi} + \pi^1 \nabla (\nabla \psi^T) \cdot \boldsymbol{\pi} \right\} \mathbf{l}_* \cdot \boldsymbol{\pi} \\ &+ \mathbf{0}(\varphi^3) \text{ (cf. (10.4) ; } \tau \text{ note la transposition)} \end{aligned}$$

$$c) \quad \frac{1}{2} \varphi^2 \mathbf{l}_* \mathbf{A}^\alpha \partial_\alpha \boldsymbol{\chi} = \frac{1}{2} \varphi^2 \mathbf{l}_* \mathbf{A}^\alpha \partial_\alpha \boldsymbol{\chi} + \mathbf{0}(\varphi^3)$$

$$d) \quad \varphi \psi^{(i)} \mathbf{l}_* \cdot \boldsymbol{\chi} = \varphi^2 (\nabla \psi_* \cdot \boldsymbol{\pi}) \mathbf{l}_* \cdot \boldsymbol{\chi} + \mathbf{0}(\varphi^3).$$

En définitive, les conditions du second ordre se traduisent par :

$$(10.8) \quad \frac{1}{2} \mathbf{l}_{1'}^* \mathbf{A}^{\alpha} \partial_{\alpha} \chi + (\nabla \psi^* \cdot \pi) \mathbf{l}_{1'}^* \cdot \chi \\ + \left\{ \frac{1}{2} \nabla \psi^* \cdot \chi + \pi^{\tau} \nabla (\nabla \psi^{\tau})^* \pi + \frac{1}{2} \partial_k (\nabla \Lambda^k) \pi \right\} \mathbf{l}_{1'}^* \cdot \pi - \mathbf{l}_{1'}^* \mathbf{A}^{\alpha} \partial_{\alpha} (\pi^{\tau} \nabla \mathbf{d}_{1'}^*) \pi \\ + (\nabla \Lambda^k \cdot \pi) \mathbf{l}_{1'}^* \cdot \partial_k \pi - \pi^{\tau} (\nabla \psi^* \cdot \pi) \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{l}_{1'}^* \partial_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathbf{d}_{1'}^*}{\partial \varphi_{\alpha}} \right) + \mathbf{l}_{1'}^* \nabla \mathbf{d}_{1'}^* \pi \right\} = 0.$$

On voit que ce système d'équations différentielles pour les fonctions χ^i est linéaire. Précisément, il est de la forme

$$(10.9) \quad \frac{1}{2} \left\{ \frac{d\chi^i}{d\sigma} + \left(\frac{d}{d\sigma} \text{Log } \theta + 2 \nabla \psi^* \cdot \pi \right) \chi^i + (\nabla \psi^* \cdot \mathbf{d}_{1'}^*) \pi^{\tau} \chi^{\tau} \right\} \mathbf{l}_{1'}^* \cdot \mathbf{d}_{1'}^* \\ = \mathbf{l}_{1'}^* \cdot \mathbf{b}^*(x_0^i, \sigma)$$

où $\mathbf{b}^*(x_0^i, \sigma)$ peut être déterminée grâce aux résultats du paragraphe 5.

11. Le cas des ondes planes. — Plaçons-nous dans le cas des ondes planes (voir § 6) à valeur propre simple. Alors,

$$(11.1) \quad \pi = \pi \mathbf{d}^*, \quad \pi = \frac{\pi_0}{\Phi},$$

$$(11.2) \quad \Phi = 1 + |\nabla \varphi| \nabla \lambda^* \cdot \pi_0 \sigma,$$

$$(11.3) \quad \chi = \pi^2 \nabla \mathbf{d}^* \cdot \mathbf{d}^* + \frac{\partial \mathbf{d}^*}{\partial \varphi_k} \partial_k \pi + \chi \mathbf{d}^*.$$

Notant ensuite, d'après (3.14),

$$\mathbf{l}^* \mathbf{A}^{\alpha} \frac{\partial \mathbf{d}^*}{\partial \varphi_{\beta}} \pi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \varphi_{\alpha} \partial \varphi_{\beta}} \pi_{\alpha\beta} \mathbf{l}^* \cdot \mathbf{d}^* + \frac{\partial \psi^*}{\partial \varphi_{\alpha}} \pi_{\alpha\beta} \mathbf{l}^* \frac{\partial \mathbf{d}^*}{\partial \varphi_{\beta}}$$

et, de la loi de propagation,

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial \varphi_{\alpha}} \pi_{\alpha} + (\nabla \psi^* \cdot \mathbf{d}^*) \pi^2 = 0,$$

qu'il dérive,

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial \varphi_{\alpha}} \pi_{\alpha\beta} + 2\pi \pi_{\beta} (\nabla \psi^* \cdot \mathbf{d}^*) = 0,$$

on obtient aisément à partir de (10.8) :

$$(11.4) \quad \frac{d\chi}{d\sigma} + 3(\nabla \psi^* \cdot \mathbf{d}^*) \pi \chi + \{ \nabla \psi^* \nabla \mathbf{d}^* + 2\mathbf{d}^{\tau} \nabla (\nabla \psi^{\tau})^* \mathbf{d}^* \} \pi^3 \\ + \left(2 \nabla \Lambda^k \cdot \mathbf{d}^* + \Delta \psi^* \cdot \frac{\partial \mathbf{d}^*}{\partial \varphi_k} \right) \pi \partial_k \pi + \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda^k}{\partial \varphi_l} \partial_{kl} \pi = 0.$$

Comme

$$(11.5) \quad \begin{aligned} \partial_k \pi &= \Phi^{-2} \partial_{k_0} \pi_0, \\ \partial_{kl} \pi &= \Phi^{-3} (\Phi \partial_{k_0 l_0} \pi_0 - 2 \partial_{k_0} \pi_0 \partial_{l_0} \pi_0 \nabla \psi_* \cdot \mathbf{d} \star \sigma), \end{aligned}$$

l'intégration conduit à

$$(11.6) \quad \begin{aligned} \chi \Phi^3 - \chi_0 + |\nabla \varphi| \pi_0^3 \sigma \{ \nabla \lambda \nabla \mathbf{d} \mathbf{d} + 2 \mathbf{d}^T \nabla (\nabla \lambda^T) \mathbf{d} \} \star \\ + \sigma \left\{ 2 \nabla \Lambda^k \cdot \mathbf{d} + |\nabla \varphi| \nabla \lambda \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \varphi_k} \right\}_* \pi_0 \partial_{k_0} \pi_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda^k_*}{\partial \varphi_l} \partial_{k_0 l_0} \pi_0 \left\{ \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \sigma^2 |\nabla \varphi| \nabla \lambda \star \cdot \mathbf{d} \star \frac{\partial \Lambda^k_*}{\partial \varphi_l} (\pi_0 \partial_{k_0 l_0} \pi_0 - 2 \partial_{k_0} \pi_0 \partial_{l_0} \pi_0) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Si les ondes présentent le caractère exceptionnel (cf. 8.1),

$$(11.7) \quad \nabla (\nabla \lambda \cdot \mathbf{d}_l) \mathbf{d}_{l'} = \mathbf{d}_l^T \nabla (\nabla \lambda^T) \mathbf{d}_{l'} + \nabla \lambda \nabla \mathbf{d}_l \mathbf{d}_{l'} \equiv 0,$$

et l'équation (11.6) montre que

$$(11.8) \quad \chi = \chi_0(x_0^i),$$

lorsque s'ajoute à la restriction initiale

$$(11.9) \quad \pi_0 = \text{cte},$$

la condition

$$(11.10) \quad \mathbf{d}^T \nabla (\nabla \lambda^T) \mathbf{d}_* = 0.$$

De (8.1) ou plutôt de

$$\nabla \psi \cdot \mathbf{d} \equiv 0$$

qui lui est équivalente, on tire encore en dérivant par rapport à φ_k

$$(11.11) \quad |\nabla \varphi| \nabla \lambda \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \varphi_k} = - \nabla \Lambda^k \cdot \mathbf{d}$$

et (11.6) s'écrit simplement

$$(11.12) \quad \begin{aligned} \chi - \chi_0 + \sigma \{ |\nabla \varphi| \mathbf{d}^T \nabla (\nabla \lambda^T) \mathbf{d} \star \pi_0^3 \\ + \nabla \Lambda^k_* \cdot \mathbf{d} \star \pi_0 \partial_{k_0} \pi_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda^k_*}{\partial \varphi_l} \partial_{k_0 l_0} \pi_0 \} = 0. \end{aligned}$$

LIVRE DEUXIÈME

APPLICATIONS. EXEMPLES

I. — L'électromagnétisme classique.

1. **Les caustiques de l'Optique.** — Nous ne prétendons pas à beaucoup d'originalité en reprenant ici brièvement l'étude des ondes lumineuses devenue si classique, mais nous n'avons pu trouver un exemple qui illustrât mieux ni plus simplement le phénomène de choc linéaire. Partant donc des équations de Maxwell

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \dot{\vec{H}} + \text{rot } \vec{E} &= 0, \\ \dot{\vec{E}} - \text{rot } \vec{H} &= 0, \end{aligned}$$

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \text{div } \vec{H} &= 0, \\ \text{div } \vec{E} &= 0, \end{aligned}$$

et introduisant le symbole delta pour noter les discontinuités du premier ordre dont l'ensemble constitue le vecteur π , nous trouvons

$$(1.3) \quad \begin{aligned} -\lambda \delta \vec{H} + \vec{n} \times \delta \vec{E} &= 0, \\ \lambda \delta \vec{E} + \vec{n} \times \delta \vec{H} &= 0, \end{aligned}$$

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \vec{n} \cdot \delta \vec{H} &= 0, \\ \vec{n} \cdot \delta \vec{E} &= 0. \end{aligned}$$

Ces dernières contraintes interdisent l'existence d'ondes stationnaires longitudinales que permettent les seules équations (1.3) :

$$\begin{aligned} \delta \vec{H} &= \pi^{(1)} \vec{n}, \\ \delta \vec{E} &= \pi^{(2)} \vec{n}. \end{aligned}$$

Etant ainsi entendu que λ ne saurait être nulle, on obtient

$$(\lambda^2 - 1) \delta \vec{E} + (\vec{n} \cdot \delta \vec{E}) \vec{n} = 0,$$

soit

$$(1.5) \quad \lambda = \pm 1.$$

Les équations (1.3) montrent encore que

$$\begin{aligned}\delta\vec{H} &= \pm \pi\vec{h}_0, \\ \delta\vec{E} &= \pi\vec{e}_0,\end{aligned}$$

où $\vec{h}_0$ et $\vec{e}_0$ sont des vecteurs unitaires fonctions du point M_0 sur S_0 et tels qu'ils forment avec $\vec{n}$ un repère orthonormé $(\vec{e}_0, \vec{h}_0, \vec{n})$ direct. En raison de (1.5) les surfaces d'onde $S(t)$ sont parallèles et

$$(1.6) \quad \pi = \frac{\pi_0}{\theta},$$

où θ a l'expression (6.7), laquelle s'annule sur une surface à deux nappes, lieu géométrique des centres de courbure de la surface d'onde S_0 . On a déjà reconnu la caustique qui, brillamment éclairée, manifeste l'apparition des chocs linéaires. On sait l'importance qui s'attache, en Optique, à la détermination de cette surface. Mise en évidence expérimentalement, elle permet de calculer, *a posteriori*, la forme des surfaces d'onde [12]. D'autre part, l'intensité lumineuse, proportionnelle à $\sqrt{E^2 + H^2}$, renseigne par sa variation sur celle du champ. Ce dernier présentera un maximum sur la surface focale.

II. — La relativité générale.

2. **Les ondes gravitationnelles.** — Lorsqu'on utilise des coordonnées isothermes répondant aux conditions de de Donder,

$$(2.1) \quad g^{\alpha\beta}\partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = 0,$$

les équations d'Einstein du cas extérieur s'écrivent [13]

$$(2.2) \quad R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} = 0,$$

les $F_{\mu\nu}$ étant des formes quadratiques des dérivées premières des potentiels gravitationnels $g_{\alpha\beta}$. Ces derniers sont continus ainsi que leurs dérivées premières tandis que des discontinuités $\pi_{\alpha\beta} = [\partial_{\varphi\varphi}g_{\alpha\beta}]$ peuvent exister dans les dérivées secondes [14] à la traversée des hypersurfaces caractéristiques satisfaisant à

$$(2.3) \quad g^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta = 0.$$

La relation d'exception (I, 8.2) est vérifiée puisque λ ne dépend que des $g_{\alpha\beta}$, lesquels possèdent des dérivées premières continues (Le système

des équations d'Einstein correspond d'ailleurs au type (I, 8.3)). Dans l'espace pseudo-euclidien

$$(2.4) \quad g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \text{diag } (1, -1, -1, -1),$$

les ondes sont parallèles et leur vitesse de propagation égale celle de la lumière dans le vide,

$$(2.5) \quad \lambda_* = \pm 1.$$

Le système (2.2) est évidemment hyperbolique pour les valeurs (2.4); en posant

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$$

et en faisant l'approximation du champ faible (voir par exemple [15]) on en tire

$$\square h_{\alpha\beta} = 0.$$

Par conséquent, les discontinuités suivent une loi identique à (1.6), savoir [16]

$$(2.6) \quad \pi_{\alpha\beta} = \frac{\pi_{\alpha\beta}^0}{\theta}.$$

En outre, M. Lichnerowicz a montré (*op. cit.*) que les $\pi_{0\alpha}^0$ étaient dénués de toute signification physique et que l'on pouvait toujours les supposer nuls. Tenant compte enfin des restrictions exprimées par (2.1), on peut noter :

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \pi_{0\alpha} &= 0 \\ \delta^{ij}\pi_{ij} &= 0 \\ n^j\pi_{ij} &= 0; \end{aligned}$$

en sorte que les discontinuités initiales ne dépendent que de deux fonctions arbitraires du point M_0 .

Physiquement, les π_{ij} ont pour effet de créer une discontinuité dans l'accélération relative de deux particules d'essai situées de part et d'autre du front d'onde. Cette discontinuité varie d'ailleurs avec leurs positions; elle est nulle si elles sont alignées suivant la normale $\vec{n}$ mettant en évidence le caractère transverse des ondes gravitationnelles [17].

III. — La magnétohydrodynamique.

3. Les équations de Lundquist, les ondes d'Alfvén. — Les équations de Lundquist lient le champ magnétique $\vec{b}$, la vitesse $\vec{u}$ du fluide, sa densité ρ et l'entropie S en faisant également intervenir la vitesse du

son $c(\rho, S)$ et une constante (perméabilité magnétique) μ , selon [18] :

$$(3.1) \quad \begin{cases} \dot{\vec{b}} + \text{rot}(\vec{b} \times \vec{u}) = 0 \\ \dot{\vec{u}} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{c^2}{\rho} \nabla \rho + \frac{\vec{b}}{\mu \rho} \times \text{rot} \vec{b} = 0 \\ \dot{\rho} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \\ \dot{S} + (\vec{u} \cdot \nabla) S = 0. \end{cases}$$

En dehors des surfaces de contact qui se déplacent avec le fluide existent trois modes de propagation possibles associés respectivement aux ondes d'Alfvén, aux ondes rapides (supersoniques) et aux ondes lentes (subsoniques) [19] (En relativité générale, les vitesses correspondantes ont été déterminées par Mme Choquet-Bruhat [20]).

Les ondes d'Alfvén de vitesses

$$(3.2) \quad \lambda = u_n \pm v_n,$$

où

$$(3.3) \quad \vec{v} = \frac{\vec{b}}{\sqrt{\mu \rho}}, \quad u_n = \vec{u} \cdot \vec{n}, \text{ etc.,}$$

sont des ondes transverses :

$$(3.4) \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \vec{n} \times \vec{b} \\ \pm \vec{v} \times \vec{n} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Elles sont exceptionnelles —

$$(3.5) \quad \nabla \lambda = \left(\pm \frac{\vec{n}}{\sqrt{\mu \rho}}, \vec{n}, -\frac{1}{2} \frac{v_n}{\rho}, 0 \right)$$

et (I, 8.1) est vérifiée — et comme

$$(3.6) \quad \vec{\Lambda} = \vec{u} \pm \vec{v},$$

elles se déplacent par translation (voir liv. I, § 6),

$$(3.7) \quad \pi = \pi_0.$$

En ce qui concerne les discontinuités du second ordre,

$$(3.8) \quad \nabla \mathbf{d} \mathbf{d} = \begin{pmatrix} b_n \vec{n} - \vec{b} \\ \pm (\vec{v} - v_n \vec{n}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\nabla \lambda \nabla \mathbf{d} \mathbf{d} \equiv 0.$$

Constatant que l'on a également

$$\nabla \vec{\Lambda} \cdot \mathbf{d} \equiv 0,$$

les ondes planes conduisent à (cf. I, 11.7, 12) :

$$(3.9) \quad \chi = \chi_0.$$

4. **Les ondes rapides et lentes.** — Elles sont définies par les vitesses

$$(4.1) \quad \lambda = u_n + w, \quad w^2 = \frac{1}{2}(c^2 + v^2 \pm \sqrt{\Delta}),$$

$$(4.2) \quad \Delta = (c^2 + v^2)^2 - 4c^2 v_n^2 = (c^2 - v^2)^2 + 4c^2(v^2 - v_n^2) \geq 0,$$

$$(4.3) \quad \vec{\Lambda} = \vec{u} + w\vec{n} \pm \frac{c^2 v_n}{w\sqrt{\Delta}} (\vec{n}v_n - \vec{v}),$$

et les vecteurs propres

$$(4.4) \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \vec{b} - b_n \vec{n} \\ \pm \left(w\vec{n} - \frac{v_n}{w} \vec{v} \right) \\ \rho \left(1 - \frac{v_n^2}{w^2} \right) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le calcul fournit ensuite :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \vec{b}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\mu\rho}\sqrt{\Delta}} \left(w\vec{v} - c^2 \frac{v_n}{w} \vec{n} \right)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \vec{u}} = \vec{n}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \rho} = \pm \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \left\{ \left(2cc' - \frac{v^2}{\rho} \right) w - \left(2cc' - \frac{c^2}{\rho} \right) \frac{v_n^2}{w} \right\}$$

avec

$$c > 0, \quad c' = \frac{\partial c}{\partial \rho} > 0.$$

Il est commode d'introduire la quantité

$$(4.5) \quad q(\mathbf{u}, \vec{n}) = \frac{v_n^2}{w^2}$$

à l'aide de laquelle s'exprime aisément [21]

$$(4.6) \quad \nabla \lambda \cdot \mathbf{d} = -w(q - 1)Q(q),$$

avec

$$(4.7) \quad Q(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{c'}{c} \rho + \frac{5}{2} \right) \frac{q - q_1}{q - q_2},$$

$$(4.8) \quad q_1 = 1 + \frac{3(v^2 - c^2)}{2cc'\rho + 5c^2}, \quad q_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right).$$

Il vient ensuite grâce à (4.4),

$$(4.9) \quad [\dot{\rho}] = |\nabla \varphi| \lambda \pi \rho (q - 1),$$

en sorte que si l'on suppose une propagation dans un fluide au repos ($\vec{u} = 0$) où règne un champ magnétique constant $\vec{b}$:

$$(4.10) \quad |\nabla \varphi| \nabla \lambda \cdot \pi = - \frac{[\dot{\rho}]}{\rho} Q(q).$$

Dans le cas où $v < c$, $\frac{c'}{c} \rho < \frac{1}{2}$,

$$\frac{v^2}{c^2} < q_1 < q_2 < 1,$$

les inégalités

$$0 \leq v_n^2 \leq v^2,$$

imposent à q le domaine de variation suivant :

pour les ondes rapides

$$0 \leq q \leq \frac{v^2}{c^2},$$

pour les ondes lentes

$$1 \leq q \leq 1 + \frac{v^2}{c^2}.$$

Par suite, pour l'ensemble de ces ondes

$$(4.11) \quad \frac{c'}{c} \rho + 1 \leq Q \leq \frac{3}{2}$$

et ces dernières inégalités seraient changées de sens si $\frac{c'}{c} \rho$ était supérieur à $\frac{1}{2}$.

Ainsi, tout comme en Aérodynamique (où $w = \pm c$, $Q = 1 + \frac{c'}{c} \rho$) il se produira des chocs si le fluide subit au passage des ondes rapides ou lentes une compression (voir I, 8.6),

$$(4.12) \quad [\dot{\rho}] > 0.$$

Il suffira que cette condition soit vérifiée initialement.

IV. — L'électrodynamique non linéaire

5. **Les équations du champ.** — Les composantes des vecteurs champ électrique $\vec{E}$ et champ magnétique $\vec{H}$ sur les axes d'un repère orthonormé peuvent s'exprimer à partir du vecteur d'univers (q^α) par les formules [22]

$$(5.1) \quad \begin{aligned} H^1 &= q_2^3 - q_3^2, & E^1 &= q_1^0 - q_0^1 \\ H^2 &= q_3^1 - q_1^3, & E^2 &= q_2^0 - q_0^2 \\ H^3 &= q_1^2 - q_2^1, & E^3 &= q_3^0 - q_0^3 \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$q_\beta^\alpha = \partial_\beta q^\alpha \quad (x^0 = t, \quad c = 1)$$

et dont une conséquence immédiate est

$$(5.2) \quad \vec{H} + \text{rot } \vec{E} = 0,$$

$$(5.3) \quad \text{div } \vec{H} = 0.$$

D'autre part, on sait que le tenseur champ électromagnétique

$$(5.4) \quad F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha q_\beta - \partial_\beta q_\alpha$$

permet de construire deux invariants [13] [14]

$$(5.5) \quad Q = \frac{1}{2}(\vec{H}^2 - \vec{E}^2), \quad R = \vec{E} \cdot \vec{H},$$

qu'il est commode, pour la suite de ce paragraphe, d'expliciter de la façon suivante

$$(5.6) \quad \begin{aligned} 2Q &= q_i^j q_j^i - q_j^i q_i^j - q_i^0 q_i^0 - q_0^i q_0^i + 2q_i^0 q_0^i, \\ R &= \varepsilon_{ijk}(q_j^0 q_k^i - q_0^j q_k^i), \end{aligned}$$

en faisant intervenir l'indicateur de permutation ε_{ijk} égal à $+1$ si ijk constitue une permutation paire de la suite naturelle 123, -1 si elle en constitue une permutation impaire, 0 dans tous les autres cas.

Si l'on n'impose pas aux équations du champ la condition d'être linéaires, on peut prendre comme densité lagrangienne une fonction arbitraire des deux quantités Q, R [9] :

$$(5.7) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(Q, R).$$

Le principe variationnel

$$(5.8) \quad \delta \int \mathcal{L} d^4V = 0.$$

se traduit par les équations d'Euler [15]

$$(5.9) \quad \partial_{\beta} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\beta}^{\alpha}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{\alpha}}.$$

On a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\beta}^{\alpha}} = L_{\alpha} \frac{\partial Q}{\partial q_{\beta}^{\alpha}} + L_{\alpha} \frac{\partial R}{\partial q_{\beta}^{\alpha}}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{\alpha}} \equiv 0,$$

puis, en utilisant les expressions (5.6)

$$(5.10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial q_0^i} &= - \frac{\partial Q}{\partial q_i^0} = E^i, & \frac{\partial R}{\partial q_0^i} &= - \frac{\partial R}{\partial q_i^0} = -H^i, \\ \frac{\partial Q}{\partial q_j^i} &= -\varepsilon_{ijk} H^k, & \frac{\partial R}{\partial q_j^i} &= -\varepsilon_{ijk} E^k. \end{aligned}$$

Finalement, les équations (5.9) s'écrivent :

$$(5.11) \quad (\mathcal{L}_{\alpha Q} \dot{Q} + \mathcal{L}_{\alpha R} \dot{R}) \vec{E} + \vec{H} \times (\mathcal{L}_{\alpha Q} \nabla Q + \mathcal{L}_{\alpha R} \nabla R) + \mathcal{L}_{\alpha} (\dot{\vec{E}} - \text{rot } \vec{H}) \\ - (\mathcal{L}_{\alpha R} \dot{Q} + \mathcal{L}_{\alpha R} \dot{R}) \vec{H} + \vec{E} \times (\mathcal{L}_{\alpha R} \nabla Q + \mathcal{L}_{\alpha R} \nabla R) - \mathcal{L}_{\alpha} (\dot{\vec{H}} + \text{rot } \vec{E}) = 0,$$

$$(5.12) \quad (\mathcal{L}_{\alpha R} \vec{H} - \mathcal{L}_{\alpha Q} \vec{E}) \nabla Q + (\mathcal{L}_{\alpha R} \vec{H} - \mathcal{L}_{\alpha R} \vec{E}) \nabla R + \mathcal{L}_{\alpha} \text{div } \vec{H} - \mathcal{L}_{\alpha} \text{div } \vec{E} = 0.$$

(5.2) et (5.11) constituent avec (5.5) un système de six équations aux dérivées partielles pour les composantes des vecteurs $\vec{E}$, $\vec{H}$ soumises, en outre, aux contraintes (5.3, 12).

6. L'équation caractéristique. — Désignons encore par $\delta \vec{E}$, $\delta \vec{H}$ comme au paragraphe 1 les discontinuités du premier ordre. L'équation (5.2) donne

$$(6.1) \quad \lambda \delta \vec{H} = \vec{n} \times \delta \vec{E},$$

d'où, en supposant $\lambda \neq 0$,

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \delta Q &= \left(\frac{\vec{H} \times \vec{n}}{\lambda} - \vec{E} \right) \delta \vec{E}, \\ \delta R &= \left(\frac{\vec{E} \times \vec{n}}{\lambda} + \vec{H} \right) \delta \vec{E}. \end{aligned}$$

On obtient ensuite en multipliant (5.11) par λ :

$$(6.3) \quad \begin{aligned} & \{ (\mathcal{L}_{\alpha Q} (\vec{H} \times \vec{n} - \lambda \vec{E}) + \mathcal{L}_{\alpha R} (\vec{E} \times \vec{n} + \lambda \vec{H})) \cdot \delta \vec{E} \} (\vec{H} \times \vec{n} - \lambda \vec{E}) \\ & + \{ (\mathcal{L}_{\alpha R} (\vec{H} \times \vec{n} - \lambda \vec{E}) + \mathcal{L}_{\alpha R} (\vec{E} \times \vec{n} + \lambda \vec{H})) \cdot \delta \vec{E} \} (\vec{E} \times \vec{n} + \lambda \vec{H}) \\ & - \mathcal{L}_{\alpha} \{ (\lambda^2 - 1) \delta \vec{E} + (\vec{n} \cdot \delta \vec{E}) \vec{n} \} = 0. \end{aligned}$$

Quant à (5.3) et (5.12), elles projettent simplement (6.1) et (6.3) sur la normale à la surface d'onde. En revanche, lorsque λ est nul, elles fournissent des conditions indépendantes de celles que l'on obtient alors à partir de (5.2, 11) (cf. § 7).

Supposant les vecteurs $\vec{E}$, $\vec{H}$ non colinéaires, nous pouvons écrire

$$(6.4) \quad \delta \vec{E} = a^1 \vec{H} + a^2 \vec{E} + a^3 \vec{S},$$

en introduisant le vecteur de Poynting

$$(6.5) \quad \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}.$$

La décomposition (6.4) introduite dans (6.3) multipliée successivement par $\vec{H}$, $\vec{E}$, $\vec{S}$, on obtient trois équations scalaires que l'on peut transcrire sous la forme [23]

$$(6.6) \quad (\lambda^2 \alpha_{ij} + \lambda \beta_{ij} + \gamma_{ij}) a^j = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Les différents coefficients sont symétriques par rapport à leurs indices et le calcul fournit :

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \alpha_{11} &= R^2 \mathcal{L}_{QQ} - 2H^2 R \mathcal{L}_{QR} + H^4 \mathcal{L}_{RR} - H^2 \mathcal{L}_Q \\ \alpha_{12} &= E^2 R \mathcal{L}_{QQ} - (R^2 + E^2 H^2) \mathcal{L}_{QR} + H^2 R \mathcal{L}_{RR} - R \mathcal{L}_Q \\ \alpha_{13} &= 0 \\ \alpha_{22} &= E^4 \mathcal{L}_{QQ} - 2E^2 R \mathcal{L}_{QR} + R^2 \mathcal{L}_{RR} - E^2 \mathcal{L}_Q \\ \alpha_{23} &= 0 \\ \alpha_{33} &= -S^2 \mathcal{L}_Q. \end{aligned}$$

$$(6.8) \quad \begin{aligned} \beta_{11} &= 2S_n (R \mathcal{L}_{QR} - H^2 \mathcal{L}_{RR}) \\ \beta_{12} &= -S_n \{ R \mathcal{L}_{QQ} - (E^2 + H^2) \mathcal{L}_{QR} + R \mathcal{L}_{RR} \} \\ \beta_{13} &= (H^2 E_n - R H_n) (R \mathcal{L}_{QQ} - H^2 \mathcal{L}_{QR}) - (E^2 H_n - R E_n) (R \mathcal{L}_{QR} - H^2 \mathcal{L}_{RR}) \\ \beta_{22} &= 2S_n (R \mathcal{L}_{QR} - E^2 \mathcal{L}_{QQ}) \\ \beta_{23} &= (H^2 E_n - R H_n) (E^2 \mathcal{L}_{QQ} - R \mathcal{L}_{QR}) - (E^2 H_n - R E_n) (E^2 \mathcal{L}_{QR} - R \mathcal{L}_{RR}) \\ \beta_{33} &= 0. \end{aligned}$$

$$(6.9) \quad \begin{aligned} \gamma_{11} &= S_n^2 \mathcal{L}_{RR} + (H^2 - H_n^2) \mathcal{L}_Q \\ \gamma_{12} &= -S_n^2 \mathcal{L}_{QR} + (R - E_n H_n) \mathcal{L}_Q \\ \gamma_{13} &= S_n \{ (H^2 E_n - R H_n) \mathcal{L}_{QR} - (E^2 H_n - R E_n) \mathcal{L}_{RR} - H_n \mathcal{L}_Q \} \\ \gamma_{22} &= S_n^2 \mathcal{L}_{QQ} + (E^2 - E_n^2) \mathcal{L}_Q \\ \gamma_{23} &= S_n \{ (E^2 H_n - R E_n) \mathcal{L}_{QR} - (H^2 E_n - R H_n) \mathcal{L}_{QQ} - E_n \mathcal{L}_Q \} \\ \gamma_{33} &= (H^2 E_n - R H_n)^2 \mathcal{L}_{QQ} - 2(H^2 E_n - R H_n)(E^2 H_n - R E_n) \mathcal{L}_{QR} \\ &\quad + (E^2 H_n - R E_n)^2 \mathcal{L}_{RR} + (S^2 - S_n^2) \mathcal{L}_Q \end{aligned}$$

avec

$$(6.10) \quad S_n = \vec{S} \cdot \vec{n}, \text{ etc.}$$

Les valeurs propres, solutions de l'équation caractéristique

$$(6.11) \quad \mathcal{D}(\lambda^2 \alpha_{ij} + \lambda \beta_{ij} + \gamma_{ij}) = 0,$$

sont racines d'un polynôme du sixième degré pourvu que

(6.12)

$$\mathcal{D}(\alpha_{ij}) = -S^4 \mathcal{L}_Q \{ S^2 (\mathcal{L}_{QQ} \mathcal{L}_{RR} - \mathcal{L}_{QR}^2) - (E^2 \mathcal{L}_{QQ} + H^2 \mathcal{L}_{RR} - 2R \mathcal{L}_{QR} - \mathcal{L}_Q) \mathcal{L}_Q \}$$

soit différent de zéro. Cette condition (qui exprime la régularité de la matrice A^0 : cf. liv. I, § 2) doit être vérifiée pour que toutes les vitesses de propagation soient finies. On supposera donc

$$(6.13) \quad \mathcal{L}_Q \neq 0.$$

On verra que l'expression entre accolades est toujours strictement positive lorsque les inégalités suivantes sont, de plus, simultanément vérifiées :

$$(6.14) \quad \mathcal{L}_{QQ} \mathcal{L}_{RR} - \mathcal{L}_{QR}^2 \geq 0, \quad \mathcal{L}_Q (\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR}) \leq 0.$$

Le polynôme caractéristique comporte des termes de degré impair qui, dans l'hypothèse où les trois dérivées secondes du lagrangien ne sont pas nulles simultanément, ne disparaissent qu'avec S_n ; on verra, par exemple, que le coefficient de λ^5 égale

$$(6.15) \quad 2S^4 S_n \mathcal{L}_Q \{ (E^2 + H^2) (\mathcal{L}_{QQ} \mathcal{L}_{RR} - \mathcal{L}_{QR}^2) - \mathcal{L}_Q (\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR}) \}.$$

En conséquence, il existe certainement des ondes qui se propagent à des vitesses différentes dans les deux sens d'une direction non perpendiculaire au vecteur de Poynting. De cette façon le rôle privilégié que joue ce vecteur apparaît déjà. Il se confirme en constatant qu'une symétrie par rapport à $\vec{S}$ laisse le spectre invariant. En effet, considérer le vecteur symétrique de $\vec{n}$ revient à effectuer la substitution

$$H_n \rightarrow -H_n, \quad E_n \rightarrow -E_n,$$

qui change en leurs opposées les seules quantités, β_{13} , β_{23} , γ_{13} , γ_{23} . Il est alors aisé, en développant par la pensée le déterminant (6.11), de constater son invariance.

En tenant compte de l'identité

$$(6.16) \quad S^2 - S_n^2 - E^2 H_n^2 - H^2 E_n^2 + 2R E_n H_n = 0$$

qui résulte de

$$\vec{S} = -E_n \vec{H} \times \vec{n} + H_n \vec{E} \times \vec{n} + S_n \vec{n},$$

ainsi que de

$$(6.17) \quad S^2 = E^2 H^2 - R^2$$

qui découle immédiatement de la définition (6.5), le déterminant $\mathcal{D}$ se développe selon

$$\mathcal{D} = -S^4 \mathcal{L}_Q^2 \lambda^2 \mathcal{F}(\mathbf{u}, \lambda),$$

avec

$$(6.18) \quad \mathcal{F}(\mathbf{u}, \lambda) = \omega \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2,$$

$$(6.19) \quad \mathcal{F}_1 = S^2 \lambda^4 - 2S_n(E^2 + H^2) \lambda^3 \\ + \{ (E^2 + H^2)(E^2 + H^2 - E_n^2 - H_n^2) + 2(2S_n^2 - S^2) \} \lambda^2 \\ - 2S_n \{ E^2 + H^2 - 2(E_n^2 + H_n^2) \} \lambda \\ + S^2 - (E^2 + H^2 - E_n^2 - H_n^2)(E_n^2 + H_n^2),$$

$$(6.20) \quad \mathcal{F}_2 = (\lambda^2 - 1) \{ (E^2 \mathcal{L}_{QQ} + H^2 \mathcal{L}_{RR} - 2R \mathcal{L}_{QR} - \mathcal{L}_Q) \lambda^2 - 2S_n(\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR}) \lambda \\ + H^2 \mathcal{L}_{QQ} + E^2 \mathcal{L}_{RR} + 2R \mathcal{L}_{QR} + \mathcal{L}_Q - (\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR})(E_n^2 + H_n^2) \}$$

et

$$(6.21) \quad \omega = \frac{\mathcal{L}_{QQ} \mathcal{L}_{RR} - \mathcal{L}_Q^2}{\mathcal{L}_Q}.$$

7. Les ondes stationnaires. — Nous avons supposé jusqu'ici que λ n'était pas nul. Or, la racine $\lambda = 0$ existe et nous allons montrer que c'est une racine double. Tout d'abord (6.1) implique

$$(7.1) \quad \delta \vec{E} = \pi \vec{n}$$

tandis que, revenant à (5.11), on obtient :

$$(7.2) \quad (\mathcal{L}_{QQ} \delta Q + \mathcal{L}_{QR} \delta R) \vec{H} \times \vec{n} + (\mathcal{L}_{QR} \delta Q + \mathcal{L}_{RR} \delta R) \vec{E} \times \vec{n} - \mathcal{L}_Q \vec{n} \times \delta \vec{H} = 0.$$

Il vient d'ailleurs (5.3, 12) :

$$(7.3) \quad \vec{n} \cdot \delta \vec{H} = 0,$$

$$(7.4) \quad (\mathcal{L}_{QQ} \delta Q + \mathcal{L}_{QR} \delta R) E_n - (\mathcal{L}_{QR} \delta Q + \mathcal{L}_{RR} \delta R) H_n + \pi \mathcal{L}_Q = 0.$$

Dans tous les cas on peut poser, au vu de (7.2),

$$(7.5) \quad \delta \vec{H} = a^1 \vec{H} + a^2 \vec{E} + a^3 \vec{n},$$

d'où résultent

$$(7.6) \quad \delta Q = a^1 H^2 + a^2 R + a^3 H_n - \pi E_n, \\ \delta R = a^1 R + a^2 E^2 + a^3 E_n + \pi H_n.$$

Considérons deux cas :

1° $S_n = 0$. Les vecteurs $\vec{H} \times \vec{n}$, $\vec{E} \times \vec{n}$ sont colinéaires à $\vec{S}$: $a^3 = 0$, l'un des coefficients restants est arbitraire, l'autre s'en déduit par l'équation (7.2). L'ensemble $\delta \vec{E}$, $\delta \vec{H}$ dépend de deux paramètres ; la valeur propre $\lambda = 0$ est double.

2° $S_n \neq 0$. On tire de (7.2) :

$$(7.7) \quad \mathcal{L}_{QQ} \delta Q + \mathcal{L}_{QR} \delta R = a^1 \mathcal{L}_Q, \\ \mathcal{L}_{QR} \delta Q + \mathcal{L}_{RR} \delta R = a^2 \mathcal{L}_Q.$$

π et $a^{3'}$ sont arbitraires, $a^{1'}$ et $a^{2'}$ sont déterminés par (7.6, 7). On vérifie, en effet, que le système formé par ces équations est régulier : son déterminant

$$(7.8) \quad S^2(\mathcal{L}_{QQ}\mathcal{L}_{RR} - \mathcal{L}_{QR}^2) - \mathcal{L}_Q(H^2\mathcal{L}_{QQ} + E^2\mathcal{L}_{RR} + 2R\mathcal{L}_{QR} - \mathcal{L}_Q)$$

est strictement positif si les inégalités (6.14) sont vraies.

Il reste à tenir compte des contraintes (7.3, 4). Elles forment avec (7.6, 7) un système de quatre équations linéaire, homogène, pour les quatre inconnues $a^{1'}$, $a^{2'}$, $a^{3'}$, π et dont le déterminant,

$$(\mathcal{L}_{QQ}\mathcal{L}_{RR} - \mathcal{L}_{QR}^2) \{ S^2 - 2Q(E_n^2 - H_n^2) - (E_n^2 + H_n^2)^2 + 4RE_nH_n \} \\ - \mathcal{L}_Q \{ (H^2 - H_n^2 + E_n^2)\mathcal{L}_{QQ} + 2(R - 2E_nH_n)\mathcal{L}_{QR} + (E^2 - E_n^2 + H_n^2)\mathcal{L}_{RR} - \mathcal{L}_Q \}$$

— qui peut aussi se noter, grâce à (6.16),

$$(\mathcal{L}_{QQ}\mathcal{L}_{RR} - \mathcal{L}_{QR}^2)(S_n^2 + \{ E_n(\vec{E} - E_n\vec{n}) + H_n(\vec{H} - H_n\vec{n}) \}^2) \\ - \frac{\mathcal{L}_Q}{\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR}} \{ (\vec{H} - H_n\vec{n})\mathcal{L}_{QQ} + (\vec{E} - E_n\vec{n})\mathcal{L}_{QR} \}^2 \\ + \{ (\vec{E} - E_n\vec{n})\mathcal{L}_{RR} + (\vec{H} - H_n\vec{n})\mathcal{L}_{QR} \}^2 + (E_n\mathcal{L}_{QQ} - H_n\mathcal{L}_{QR})^2 \\ + (H_n\mathcal{L}_{RR} - E_n\mathcal{L}_{QR})^2 + (\mathcal{L}_{QQ}\mathcal{L}_{RR} - \mathcal{L}_{QR}^2)(E^2 + H^2) + \mathcal{L}_Q^2$$

— est encore strictement positif si l'on admet (6.14). Par conséquent,

$$a^{1'} = a^{2'} = a^{3'} = \pi = 0;$$

il n'existe pas d'ondes stationnaires.

8. La propagation à la vitesse fondamentale. — Existe-t-il des ondes qui se propagent à la vitesse fondamentale ou, en d'autres termes, peut-on trouver pour les valeurs

$$(8.1) \quad \lambda = \pm 1,$$

des solutions $\delta\vec{E}$ non nulles de l'équation (6.3) ?

Lorsque

$$(8.2) \quad \mathcal{L}_{QQ}\mathcal{L}_{RR} - \mathcal{L}_{QR}^2 = 0$$

les deux premiers vecteurs entre accolades du premier membre de cette équation sont colinéaires ; il suffit de choisir $\delta\vec{E}$ perpendiculaire au plan qu'ils déterminent avec $\vec{n}$:

$$(8.3) \quad \delta\vec{E} = \pi \{ \mathcal{L}_{QQ}(H_n\vec{n} - \vec{H} \mp \vec{E} \times \vec{n}) + \mathcal{L}_{QR}(E_n\vec{n} - \vec{E} \pm \vec{H} \times \vec{n}) \}, \\ \delta\vec{H} = \pi \{ \mathcal{L}_{QQ}(E_n\vec{n} - \vec{E} \pm \vec{H} \times \vec{n}) - \mathcal{L}_{QR}(H_n\vec{n} - \vec{H} \mp \vec{E} \times \vec{n}) \}.$$

Supposons maintenant que (8.2) ne soit pas satisfaite. Alors, il faut et il suffit que les trois vecteurs $\vec{H} \times \vec{n} \mp \vec{E}$, $\vec{E} \times \vec{n} \pm \vec{H}$, $\vec{n}$ soient coplanaires, c'est-à-dire que le produit mixte

$$(8.4) \quad ((\vec{H} \times \vec{n} \mp \vec{E}, \vec{n}, \vec{E} \times \vec{n} \pm \vec{H})) = 2S_n \mp (H^2 - H_n^2 + E^2 - E_n^2) = 0.$$

On en déduit (voir 6.16, 17) :

$$(8.5) \quad (H^2 - H_n^2 + E^2 - E_n^2)^2 - 4S_n^2 \\ = \{ (H^2 - E^2) - (H_n^2 - E_n^2) \}^2 + 4(R - E_n H_n)^2 = 0.$$

Il faut donc que soient vérifiées [23] :

$$(8.6) \quad H_n^2 - E_n^2 = 2Q, \quad E_n H_n = R$$

ou

$$(8.7) \quad H_n^2 = Q + \sqrt{Q^2 + R^2}, \quad E_n^2 = -Q + \sqrt{Q^2 + R^2}.$$

Ainsi, il existe deux directions de propagation symétriques par rapport au vecteur de Poynting, comprises dans l'angle aigu du dièdre que forment les plans $(\vec{S}, \vec{H})$, $(\vec{S}, \vec{E})$, dans lesquelles les ondes atteignent la vitesse de la lumière (Il est remarquable que ces directions ne dépendent pas de la forme non linéaire du lagrangien). Il en résulte que la valeur absolue d'une vitesse inférieure (ou supérieure) dans une direction quelconque à 1, est partout (sauf éventuellement dans les deux directions indiquées) strictement inférieure (ou supérieure) à 1. Eu égard à (8.4), le sens de déplacement dans les deux directions distinguées est celui qui fait avec $\vec{S}$ un angle aigu. En particulier, si $R = 0$, $Q > 0$ les deux directions sont situées dans le plan $(\vec{S}, \vec{H})$ tandis qu'elles appartiennent au plan $(\vec{S}, \vec{E})$, si $Q < 0$. Si $Q = 0$, elles font avec $\vec{E}$ et $\vec{H}$ des angles égaux à celui que font ces vecteurs entre eux. Elles sont confondues avec le support de $\vec{S}$ quand $Q = R = 0$.

9. Dans une direction perpendiculaire au vecteur de Poynting. —

Dans une telle direction le polynôme caractéristique est bicarré; on peut alors étudier les valeurs des vitesses relativement à la vitesse de la lumière. On a

$$(9.1) \quad S_n = 0$$

et (6.18-20) donnent le droit d'écrire $\mathcal{L}_0 \mathcal{F} = 0$ sous la forme :

$$(9.2) \quad (\mathcal{L}_{QQ}\mathcal{L}_{RR} - \mathcal{L}_{QR}^2) \{ S^2(\lambda^2 - 1)^2 + (E^2 + H^2 - E_n^2 - H_n^2)^2 \} \\ - \mathcal{L}_Q(\lambda^2 - 1)^2(E^2\mathcal{L}_{QQ} + H^2\mathcal{L}_{RR} - 2R\mathcal{L}_{QR} - \mathcal{L}_Q) \\ + (\lambda^2 - 1)(E^2 + H^2 - E_n^2 - H_n^2) \{ (E^2 + H^2)(\mathcal{L}_{QQ}\mathcal{L}_{RR} \\ - \mathcal{L}_{QR}^2) - \mathcal{L}_Q(\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR}) \} = 0.$$

Si les inégalités (6.14) — inégalités strictes — sont vraies, le coefficient de $\lambda^2 - 1$ est positif et il en est de même de la somme des autres termes (on remarquera que

$$- \mathfrak{L}_Q(E^2 \mathfrak{L}_{QQ} + H^2 \mathfrak{L}_{RR} - 2R \mathfrak{L}_{QR}) = \frac{-\mathfrak{L}_Q}{\mathfrak{L}_{QQ} + \mathfrak{L}_{RR}} \left\{ (\vec{E} \mathfrak{L}_{QQ} - \vec{H} \mathfrak{L}_{QR})^2 + (\vec{H} \mathfrak{L}_{RR} - \vec{E} \mathfrak{L}_{QR})^2 + (E^2 + H^2)(\mathfrak{L}_{QQ} \mathfrak{L}_{RR} - \mathfrak{L}_{QR}^2) \right\}$$

est positif). Par conséquent

$$\lambda^2 < 1,$$

dans toutes les directions de l'espace (sauf deux pour lesquelles l'égalité a lieu) pourvu que λ existe (voir le paragraphe précédent). Or, dans le cas présent, le discriminant du polynôme bicarré $\mathfrak{F}$, soit

$$(9.3) \quad (E^2 + H^2 - E_n^2 - H_n^2)^2 \{ (\mathfrak{L}_{QQ} - \mathfrak{L}_{RR} - 2Q\omega)^2 + 4(\mathfrak{L}_{QR} - R\omega)^2 \}$$

n'est jamais négatif. Encore cela ne suffit-il pas pour assurer la réalité des racines ; il faut aussi que les coefficients de λ^4 , $-\lambda^2$ et le terme indépendant soient de même signe et les inégalités (6.14) ne suffisent pas à satisfaire ces dernières conditions quels que soient $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{n}$.

Admettons (6.14). Les conditions se traduisent par

$$(9.4) \quad Y > 0,$$

$$(9.5) \quad Z > 0,$$

avec

$$(9.6) \quad Y = \left\{ 2S^2 - (E^2 + H^2)(E^2 + H^2 - E_n^2 - H_n^2) \right\} \mathfrak{L}_Q \omega + \left\{ 2Q(\mathfrak{L}_{QQ} - \mathfrak{L}_{RR}) + 4R \mathfrak{L}_{QR} + 2\mathfrak{L}_Q - (\mathfrak{L}_{QQ} + \mathfrak{L}_{RR})(E_n^2 + H_n^2) \right\} \mathfrak{L}_Q,$$

$$(9.7) \quad Z = \left\{ S^2 - (E^2 + H^2 - E_n^2 - H_n^2)(E_n^2 + H_n^2) \right\} \mathfrak{L}_Q \omega + \left\{ H^2 \mathfrak{L}_{QQ} + E^2 \mathfrak{L}_{RR} + 2R \mathfrak{L}_{QR} + \mathfrak{L}_Q - (\mathfrak{L}_{QQ} + \mathfrak{L}_{RR})(E_n^2 + H_n^2) \right\} \mathfrak{L}_Q.$$

Ces inégalités doivent être vérifiées dans toutes les directions du plan $(\vec{E}, \vec{H})$. On est donc conduit à déterminer les minima Y_m , Z_m des fonctions $Y(X)$, $Z(X)$ respectivement linéaire et quadratique de la variable

$$(9.8) \quad X = E_n^2 + H_n^2$$

sur son domaine de variation. Ce domaine sera calculé en cherchant les extrema de X considéré comme fonction de E_n (par exemple) à cause de la relation

$$S^2 - E^2 H_n^2 - H^2 E_n^2 + 2R E_n H_n = 0$$

(Cf. 6.16 ; 9.1). On trouve ainsi que X varie sur le segment :

$$(9.9) \quad \frac{1}{2} (E^2 + H^2) - \sqrt{Q^2 + R^2}, \quad \frac{1}{2} (E^2 + H^2) + \sqrt{Q^2 + R^2}.$$

On en déduit :

$$(9.10) \quad Y_m = -2(Q^2 + R^2)\mathcal{L}_Q\omega + \mathcal{L}_Q \left\{ \mathcal{L}_{QQ}(2Q + \sqrt{Q^2 + R^2}) + \mathcal{L}_{RR}(-2Q + \sqrt{Q^2 + R^2}) + 4R\mathcal{L}_{QR} + 2\mathcal{L}_Q \right\} \\ - \mathcal{L}_Q(\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR})(E^2 + H^2) \left(\sqrt{Q^2 + R^2}\varpi + \frac{1}{2} \right),$$

où

$$(9.11) \quad \varpi = \frac{\omega}{\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR}}.$$

Pour Q, R donnés, la quantité $E^2 + H^2$ peut encore prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut. On supposera donc

$$(9.12) \quad \sqrt{Q^2 + R^2}\varpi + \frac{1}{2} > 0,$$

soit

$$(9.13) \quad 0 \leq -\varpi < \frac{1}{2\sqrt{Q^2 + R^2}}.$$

Comme d'autre part

$$(9.14) \quad E^2 + H^2 > 2\sqrt{Q^2 + R^2},$$

on aura :

$$(9.15) \quad Y_m > 2Y_1,$$

$$(9.16) \quad Y_1 = -2(Q^2 + R^2)\mathcal{L}_Q\omega + \mathcal{L}_Q \{ Q(\mathcal{L}_{QQ} - \mathcal{L}_{RR}) + 2R\mathcal{L}_{QR} + \mathcal{L}_Q \}.$$

On obtient ensuite

$$(9.17) \quad Z_m = \mathcal{L}_Q \{ (Q + \sqrt{Q^2 + R^2})\mathcal{L}_{QQ} + (-Q + \sqrt{Q^2 + R^2})\mathcal{L}_{RR} + 2R\mathcal{L}_{QR} + \mathcal{L}_Q \}$$

et l'on voit que

$$Y_1 = Z_m - 2\mathcal{L}_Q(\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR})\sqrt{Q^2 + R^2} \left(\sqrt{Q^2 + R^2}\varpi + \frac{1}{2} \right).$$

On notera la suite d'implications :

$$Z_m > 0 \rightarrow Y_1 > 0 \rightarrow Y_m > 0.$$

En résumé, l'existence des racines est assurée dans toute direction perpendiculaire au vecteur de Poynting, les inégalités (6.14) étant admises à condition que, outre (9.12), soit vérifiée l'inégalité

$$(9.18) \quad Z_m > 0.$$

10. La détermination des vitesses pour les valeurs $Q = R = 0$. — Dans cette éventualité

$$(10.1) \quad E^2 = H^2 = |\vec{S}| = S$$

et, d'après (6.16),

$$(10.2) \quad S(E_n^2 + H_n^2) = S^2 - S_n^2,$$

autorisent l'écriture

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{S^2} (S\lambda - S_n)^4,$$

$$\mathcal{I}_2 = (\lambda^2 - 1) \left\{ \frac{1}{S} (S\lambda - S_n)^2 (\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR}) - \mathcal{L}_Q (\lambda^2 - 1) \right\}.$$

On doit trouver les solutions de

$$(10.3) \quad \omega (S\lambda - S_n)^4 - S(\lambda^2 - 1)(S\lambda - S_n)^2 (\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR}) + S^2 \mathcal{L}_Q (\lambda^2 - 1)^2 = 0.$$

En posant

$$(10.4) \quad \frac{(S\lambda - S_n)^2}{1 - \lambda^2} = \mu,$$

on se ramène à la résolution de l'équation

$$(10.5) \quad \omega \mu^2 + S(\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR})\mu + S^2 \mathcal{L}_Q = 0,$$

résolution qui s'effectue sans encombre selon

$$(10.6) \quad \mu = \frac{-S\mathcal{L}_Q(\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR}) \pm \mathcal{L}_Q \sqrt{\Delta}}{2(\mathcal{L}_{QQ}\mathcal{L}_{RR} - \mathcal{L}_{QR}^2)}, \quad (\omega \neq 0)$$

avec

$$(10.7) \quad \begin{aligned} \Delta &= S^2 \{ (\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR})^2 - 4(\mathcal{L}_{QQ}\mathcal{L}_{RR} - \mathcal{L}_{QR}^2) \} \\ &= S^2 \{ (\mathcal{L}_{QQ} - \mathcal{L}_{RR})^2 + 4\mathcal{L}_{QR}^2 \}. \end{aligned}$$

Ensuite (10.4) montre que λ est racine du trinôme

$$(10.8) \quad (S^2 + \mu)\lambda^2 - 2SS_n\lambda + S_n^2 - \mu = 0,$$

dans lequel μ prend les valeurs (10.6). Pour que le discriminant réduit

$$(10.9) \quad \mu(S^2 - S_n^2 + \mu)$$

ne soit pas négatif quelle que soit la grandeur de S il est nécessaire et suffisant qu'il en soit de même pour μ . Cette restriction (ou plutôt ces restrictions) équivaut à (6.14).

Finalement,

$$(10.10) \quad \lambda = \frac{SS_n \pm \sqrt{\mu(S^2 - S_n^2 + \mu)}}{S^2 + \mu}.$$

Quand $\omega = 0$ cette formule est encore valable, où l'on y fait

$$(10.11) \quad \mu = \frac{-S\mathcal{L}_Q}{\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR}}, \quad (\omega = 0)$$

tandis que coexistent les vitesses

$$\lambda = \pm 1.$$

Aussi bien ce cas est-il susceptible d'un traitement général sur l'expression (6.20) de $\mathcal{I}_2$.

11. **Les systèmes complètement exceptionnels.** — Le système des équations (5.9) où le second membre est identiquement nul est conservatif. Lorsque des chocs se produisent, on pourra donc écrire les conditions

$$\tilde{\lambda} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha^\alpha} \right] = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j^\alpha} \right] n^j,$$

soit, grâce aux expressions (5.10) :

$$(11.1) \quad \begin{aligned} \tilde{\lambda} [\mathcal{L}_Q \vec{E} - \mathcal{L}_R \vec{H}] &= [\mathcal{L}_Q \vec{H} \times \vec{n} + \mathcal{L}_R \vec{E} \times \vec{n}], \\ [\mathcal{L}_Q E_n - \mathcal{L}_R H_n] &= 0. \end{aligned}$$

La question se pose : quels sont les systèmes complètement exceptionnels ? Puisqu'il n'est pas possible de déterminer effectivement les racines du polynôme caractéristique c'est-à-dire les valeurs de λ solutions de

$$(11.2) \quad \mathcal{F} = 0,$$

nous procéderons de la façon suivante. De l'équation ci-dessus nous déduisons

$$(11.3) \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} \delta \lambda + \delta \mathcal{F} = 0$$

où

$$(11.4) \quad \delta \mathcal{F} = \nabla \mathcal{F} \cdot \delta \mathbf{u} = \lambda^* \delta c_\kappa(\mathbf{u})$$

en explicitant, si

$$(11.5) \quad \mathcal{F} = c_\kappa(\mathbf{u}) \lambda^*$$

et pour toutes les valeurs de λ qui vérifient (11.2). Ainsi (voir 6.18)

$$(11.6) \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} \delta \lambda = \delta \mathcal{F}_2 - \omega \delta \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_1 \delta \omega.$$

A partir de (6.1, 4), on obtient, en toute généralité ($\lambda \neq 0$) :

$$(11.7) \quad \begin{aligned} \lambda \delta \vec{H} &= -a^1 \vec{H} \times \vec{n} - a^2 \vec{E} \times \vec{n} + a^3 (H_n \vec{E} - E_n \vec{H}) \\ \frac{1}{2} \delta(E^2) &= a^1 R + a^2 E^2 \\ \frac{1}{2} \lambda \delta(H^2) &= a^2 S_n + a^3 (H_n R - E_n H^2) \\ \lambda \delta Q &= -a^1 \lambda R + a^2 (S_n - \lambda E^2) + a^3 (H_n R - E_n H^2) \\ \lambda \delta R &= a^1 (\lambda H^2 - S_n) + a^2 \lambda R + a^3 (H_n E^2 - E_n R) \\ \delta(E_n) &= a^1 H_n + a^2 E_n + a^3 S_n \\ \delta(H_n) &= 0 \\ \lambda \delta(S_n) &= a^1 (R - E_n H_n) + a^2 (E^2 - E_n^2 + \lambda S_n) + a^3 \{ \lambda (R H_n - H^2 E_n) - E S_n \}. \end{aligned}$$

Il vient ensuite

$$(11.8) \quad \frac{\delta \mathcal{F}_2}{\lambda^2 - 1} = \mathcal{L}_{QQ} \{ \lambda^2 \delta(E^2) - \delta Q - 2\lambda \delta(S_n) + \delta(H^2) + \delta Q - \delta(E_n^2 + H_n^2) \} \\ + \mathcal{L}_{RR} \{ \lambda^2 \delta(H^2) - 2\lambda \delta(S_n) + \delta(E^2) - \delta(E_n^2 + H_n^2) \} \\ + \{ a \mathcal{L}_{QQQ} - 2R(\lambda^2 - 1) \mathcal{L}_{QQR} + b \mathcal{L}_{QRR} \} \delta Q \\ + \{ a \mathcal{L}_{QQR} - 2R(\lambda^2 - 1) \mathcal{L}_{QRR} + b \mathcal{L}_{RRR} - 3(\lambda^2 - 1) \mathcal{L}_{QR} \} \delta R,$$

avec

$$(11.9) \quad a = E^2 \lambda^2 - 2S_n \lambda + H^2 - E_n^2 - H_n^2, \\ b = H^2 \lambda^2 - 2S_n \lambda + E^2 - E_n^2 - H_n^2.$$

Les expressions (11.7) fournissent :

$$(11.10) \quad \lambda^2 \delta(E^2) - \delta Q - 2\lambda \delta(S_n) + \delta(H^2) + \delta Q - \delta(E_n^2 + H_n^2) = -3(\lambda^2 - 1) \delta Q,$$

$$(11.11) \quad \lambda^2 \delta(H^2) - 2\lambda \delta(S_n) + \delta(E^2) - \delta(E_n^2 + H_n^2) = 0.$$

Le produit $2S_n \lambda$ qui figure dans $\mathcal{F}_2$ est tiré de (11.2) et porté dans (11.9), ce qui donne :

$$(11.12) \quad (\lambda^2 - 1)a = (\lambda^2 - 1)^2 \beta + \varpi \mathcal{F}_1,$$

$$(11.13) \quad (\lambda^2 - 1)b = (\lambda^2 - 1)^2 \alpha + \varpi \mathcal{F}_1,$$

où

$$(11.14) \quad \alpha = \frac{\mathcal{L}_Q + 2Q \mathcal{L}_{QQ} + 2R \mathcal{L}_{QR}}{\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR}}, \quad \beta = \frac{\mathcal{L}_Q + 2R \mathcal{L}_{QR} - 2Q \mathcal{L}_{RR}}{\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR}},$$

et, rappelons-le,

$$(11.15) \quad \varpi = \frac{\omega}{\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR}}.$$

(11.9-15) permettent d'écrire (11.8) :

$$(11.16) \quad \delta \mathcal{F}_2 = -(\lambda^2 - 1)^2 (\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR}) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial Q} \delta Q + \frac{\partial \beta}{\partial R} \delta R \right) + \varpi \mathcal{F}_1 \delta (\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR}).$$

Calculons $\delta \mathcal{F}_1$. Par l'addition membre à membre des identités (11.10, 11) on obtient :

$$(11.17) \quad \delta(E_n^2 + H_n^2) = \frac{1}{2} (\lambda^2 + 1) \delta(E^2 + H^2) - 2\lambda \delta(S_n) + (\lambda^2 - 1) \delta Q.$$

Utilisant cette égalité, on trouve

$$(11.18) \quad \delta \mathcal{F}_1 = (\lambda^2 - 1)^2 \left\{ \delta(S^2) - \frac{1}{2} (E^2 + H^2) \delta(E^2 + H^2) \right\} - (\lambda^2 - 1)(a + b) \delta Q,$$

tandis qu'il est facile de montrer, en se servant uniquement de (6.17), que

$$(11.19) \quad \frac{1}{2} (E^2 + H^2) \delta(E^2 + H^2) - \delta(S^2) = 2R \delta R + 2Q \delta Q.$$

Finalement (11.6) devient :

$$(11.20) \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} \delta \lambda = \mathcal{F}_1 \{ \varpi \delta(\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR}) + 2\omega \varpi \delta Q - \delta \omega \} \\ - (\lambda^2 - 1)^2 \left\{ (\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR}) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial Q} \delta Q + \frac{\partial \beta}{\partial R} \delta R \right) - 2\omega(Q \delta Q + R \delta R) - \omega(\alpha + \beta) \delta Q \right\}.$$

Lorsque le système d'équations (5.2, 11) est complètement exceptionnel, le premier — et par suite le second — membre de (11.20) est identiquement nul pour les quatre valeurs caractéristiques qui satisfont (11.2). On doit donc annuler dans (11.20), à l'intérieur de chaque accolade, les coefficients de δQ et de δR . On arrive ainsi au système d'équations aux dérivées partielles :

$$(11.21) \quad \frac{\partial \varpi}{\partial Q} - 2\varpi^2 = 0,$$

$$(11.22) \quad \frac{\partial \varpi}{\partial R} = 0,$$

$$(11.23) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial Q} - 2\varpi \alpha = 0,$$

$$(11.24) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial R} - 2\varpi R = 0.$$

On lui adjointra :

$$(11.25) \quad \alpha - \beta = 2Q.$$

Deux cas sont à considérer :

1° $\omega = 0$. Les deux dernières équations écrites s'intègrent selon :

$$\alpha = \text{cte.}$$

On est ramené à prendre des solutions du système

$$(11.26) \quad \begin{cases} \omega = 0, \\ \alpha = \text{Cte} = -k_1. \end{cases}$$

Notons par parenthèse que μ (10.11) égale Sk_1 .

2° $\omega \neq 0$ (11.21, 22) donnent

$$(11.27) \quad 2(Q + k_1)\varpi = -1$$

et (11.24),

$$(11.28) \quad \alpha = \frac{-R^2}{2(Q + k_1)} + f(Q).$$

La valeur de α que fournit (11.28) doit vérifier (11.23). Il en résulte l'équation différentielle

$$(11.29) \quad \frac{df}{dQ} + \frac{f}{Q + k_1} = 0$$

dont la solution

$$f = \frac{-k_2}{2(Q + k_1)}$$

conduit au système

$$(11.30) \quad \begin{cases} 2(Q + k_1)\varpi = -1, \\ 2(Q + k_1)\alpha = -(R^2 + k_2). \end{cases}$$

(k_1, k_2 sont des constantes).

On aura ici (voir (10.6)) :

$$\mu = S(k_1 \pm \sqrt{k_1^2 - k_2}).$$

La théorie de Born-Infeld utilise le lagrangien [24]

$$(11.31) \quad L = (1 + 2Q - R^2)^{\frac{1}{2}}$$

qui engendre un système exceptionnel $\left(\varpi = \frac{-1}{2(Q+1)}, \alpha = -\frac{R^2+1}{2(Q+1)}\right)$.

De même, si l'on considère les solutions pour lesquelles $R \equiv 0$, en partant du lagrangien

$$(11.31') \quad L = (1 + 2Q)^{\frac{1}{2}},$$

le système est complètement exceptionnel ($\omega = 0, \alpha = -1$). Ce fait avait déjà été constaté dans l'étude unidimensionnelle de cette théorie ; les courbes caractéristiques forment deux familles de courbes isoclines [9] [25].

On verra également que la théorie de Heisenberg-Euler qui fait usage de la fonction de Lagrange [26]

$$(11.32) \quad \mathcal{L} = -Q + kQ^2 + \frac{7}{4}kR^2,$$

dans laquelle k est une certaine constante positive ne mène pas à un système complètement exceptionnel. On pourra se reporter à [27] pour l'étude des discontinuités dans cette dernière théorie et à [28] pour celle des chocs.

Pour terminer, notons que le lagrangien (11.31') est le seul (au choix d'une constante près et comme on s'en rendra compte en intégrant (11.26)) dépendant uniquement de Q de façon non linéaire qui conduise à un système complètement exceptionnel [25].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes*. Hermann, Paris, 1903.
 - [2] P. D. LAX, *Contributions to the theory of partial differential equations*. Princeton University Press, 1954.
 - [3] G. BOILLAT, in *Actes du Colloque : Prévisions, Calcul et Réalités* (mai 1963), Gauthier-Villars.
 - [4] G. BOILLAT, *Det Kgl. Norske Vid. Selsk. Forh.*, Bd. 35, 1962, Nr. 6.
 - [5] R. COURANT et K. O. FRIEDRICHs, *Supersonic flow and shock waves*. Interscience Publ., 1948.
 - [6] P. D. LAX, *Comm. Pure Appl. Math.*, 10, 1957, 537.
 - [7] O. A. OLEJNIK, *Uspekhi Matem. Nauk*, 9, 1954, 231 ; *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 109, 1956, 1098.
 - [8] A. LADYZHENSKAYA, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 3, 1956, 291.
 - [9] T. TANIUTI, *Progr. Theor. Phys.*, suppl. 9, 1958, 69.
 - [10] G. BOILLAT, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 257, 1963, 3560.
 - [11] J. NICOLLE, in *Encyclopédie Française*, 2, 12-6, 1956.
 - [12] J. CABANNES, *Ibid.*, 2, 24-11, 1956.
 - [13] V. FOCK, *The theory of space time and gravitation*. Pergamon Press, 1959.
 - [14] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*. Masson, Paris, 1955.
 - [15] C. MøLLER, *The theory of relativity*. Oxford, 1952.
 - [16] T. Y. THOMAS, *Journ. Math. Anal. Appl.*, 3, 1961, 315.
 - [17] F. A. E. PIRANI, *Phys. Rev.*, 105, 3, 1957, 1089.
 - [18] S. LUNDQUIST, *Arkiv för Fysik*, Bd. 5, 1952, Nr. 15.
 - [19] K. O. FRIEDRICHs et H. KRANZER, *Notes on Magneto-Hydrodynamics*, VIII, NYO-6486, New York University, 1958.
 - [20] Y. BRUHAT, *Astronautica Acta*, vol. VI, 1960, fasc. 6, 354.
 - [21] G. BOILLAT, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 257, 1963, 3313.
 - [22] A. LICHNEROWICZ, *Éléments de calcul tensoriel*. A. Colin, Paris, 1958.
 - [23] G. BOILLAT, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 258, 1964, 2487.
 - [24] M. BORN et L. INFELD, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, série A, 144, 1934, 425 ; 147, 1934, 522 ; 150, 1935, 141.
 - [25] D. BLOKHINTSEV et V. ORLOV, *Zh. Eksp. i Teor. Fiz.*, 25, 1953, 513.
 - [26] W. HEISENBERG et H. EULER, *Zeitschrift für Physik*, 98, 1936, 714.
 - [27] M. LUTZKY, *Tech. Note*, Nr. III, Maryland, Phys. Dept.
 - [28] M. LUTZKY et J. S. TOLL, *Phys. Rev.*, 113, 1959, 1649.
-

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS	Pages VII
Liminaire	1

LIVRE PREMIER

THÉORIE GÉNÉRALE

1. Le champ, les équations du champ et l'onde	3
2. Vitesse normale, vitesse radiale	4
3. Premières expressions.	6
4. Le système différentiel aux discontinuités	8
5. La propagation des ondes dans un état constant	9
6. Ondes planes, ondes de translation et ondes parallèles	11
7. Les chocs	12
8. Les chocs non linéaires	13
9. Les chocs linéaires	14
10. Les discontinuités du second ordre	15
11. Le cas des ondes planes	17

LIVRE DEUXIÈME

APPLICATIONS. EXEMPLES

I. — L'ÉLECTROMAGNÉTISME CLASSIQUE

1. Les caustiques de l'Optique	19
--	----

II. — LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

2. Les ondes gravitationnelles	20
--	----

III. — LA MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE

3. Les équations de Lundquist, les ondes d'Alfvén	21
4. Les ondes rapides et lentes	23

	Pages
IV. — L'ÉLECTRODYNAMIQUE NON LINÉAIRE	
5. Les équations du champ	25
6. L'équation caractéristique	26
7. Les ondes stationnaires	29
8. La propagation à la vitesse fondamentale	30
9. Dans une direction perpendiculaire au vecteur de Poynting. .	31
10. La détermination des vitesses pour les valeurs $Q = R = 0$. .	33
11. Les systèmes complètement exceptionnels	35
BIBLIOGRAPHIE	39

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Les solutions élémentaires des équations d'ondes
sur les variétés riemanniennes hyperboliques.

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 2 décembre 1964.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE.

IMPRIMÉ EN FRANCE

IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A., LAVAL, N° 5040. — 7-1965.

3^e TRIMESTRE 1965.

N° D'ÉDITEUR : 1363.

64-88

N° de code 539-36

